Номер варианта совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки

ЗАДАНИЯ

Контрольная работа 1

***Задача* 1**

Найти оригиналы по заданным изображениям (табл. 1).

Таблица 1

№ варианта	$F_1(s)$	$F_2(s)$
0	$\frac{2e^{-s}}{s+1}$	$\frac{s+6}{(s+1)(s^2+3s+2)(s^2+s+1)}$
1	$\frac{5e^{-3s}}{s^2+4}$	$\frac{5s+8}{s^2(p+2)(s^2+5s+5)}$
2	$\frac{e^{-2s}}{4s+2}$	$\frac{s+6}{(s+2)(s^2+3s)(s^2+4s+5)}$
3	$\frac{3e^{-2s}}{6s+1}$	$\frac{2s+8}{s(s^2+2s)(s^2+4s+5)}$
4	$\frac{2e^{-3s}}{s^3}$	$\frac{5}{(s+4)(s^2+6s+8)(s^2+4s+29)}$
5	$\frac{4e^{-3s}}{3s+1}$	$\frac{2s+10}{s^4(s^2+6s+10)}$
6	$\frac{5e^{-2s}}{s^3}$	$\frac{12}{(s+1)(s^2+9s+14)(s^2+s+1)}$
7	$\frac{7e^{-2s}}{(s+3)^3}$	$\frac{2s+5}{s^3(s^2+5s+13)}$
8	$\frac{3e^{-2s}}{s+2}$	$\frac{10}{(s+5)(s^2+6s-4)(s^2+s+10)}$
9	$\frac{e^{-4s}}{s^4}$	$\frac{12s+8}{s^3(s+1)(s^2+s+1)}$

***Задача* 2**

С помощью преобразования Лапласа решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями (табл. 2).

Таблица 2

№ варианта	Уравнение	Начальные условия
0	$y'' + 4y' + 3y = 2e^{-t}\cos(t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
1	$y'' + y' + 5y = 2\sin(t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 0$
2	$y'' - 2y' + 5y = 2\sin(2t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
3	$y'' - y' + 2y = 3e^{2t}\cos(2t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
4	$y'' + 6y' + 13y = \int_0^t e^t\,dt$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
5	$y'' + y' - 5y = 2e^{2t}\sin(t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$
6	$y'' + 2y' + y = e^t$	$y(0) = 1;\ y'(0) = 0$
7	$y^{IV} - y'' = e^{-t}\cos(t)$	$y(0) = 0;\ y'(0) = -1;\ y''(0) = y'''(0) = 0$
8	$y''' - y'' = e^{2t}$	$y(0) = 1\ ;\ y'(0) = y''(0)$
9	$y'' - y' = te^{2t}$	$y(0) = 0;\ y'(0) = 0$

***Задача* 3**

По известной кривой разгона и весовой функции линейного элемента (табл. 3) найти: 1) реакцию на входной сигнал $x(t)$; 2) весовую функцию или кривую разгона соответственно; 3) передаточную функцию элемента.

Таблица 3

№ варианта	$h(t)$	$\omega(t)$	$x(t)$
0	$1-e^{-3t}$	e^{-t}	t^2
1	$4e^{-2t}$	$t\cdot e^{-2t}$	t
2	t^2+t	$1-e^{-t}$	$1-e^{-t}$
3	$1-e^{-2t}$	$4e^{-2t}$	$1-e^{-2t}$
4	$-1-e^{-2t}+t$	$t\cdot e^{-t}$	t^2-1
5	$1-e^{-t}\cos t$	$8t\cdot e^{-t/2}$	$t-1$
6	t^2+1	e^{-2t}	$\sin 3t$
7	$2t^2$	$2-t\cdot e^{-t}$	$1-e^{-2t}\sin t$
8	$2(1-e^{-3t})$	$t\cdot e^{-2t}$	$2t^2+t$
9	$1-e^{-2t}\sin 3t$	$5e^{-3t}$	$t+1$

***Задача* 4**

По известной передаточной функции элемента $W(s)$ найти его кривую разгона, весовую функцию, амплитудно-частотную, фазо-частотную, амплитудно-фазовую характеристики. Построить графики. Записать дифференциальное уравнение элемента, связывающее выходную координату и входную координату (табл. 4).

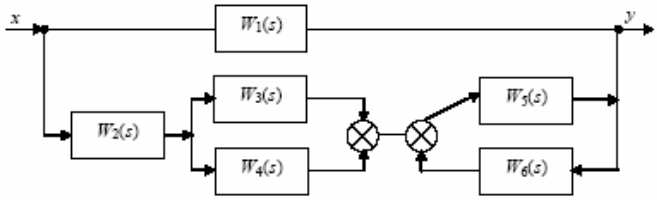
Таблица 4

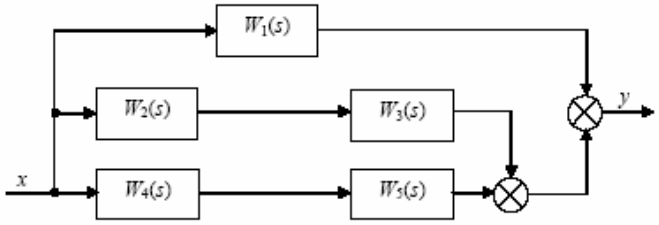
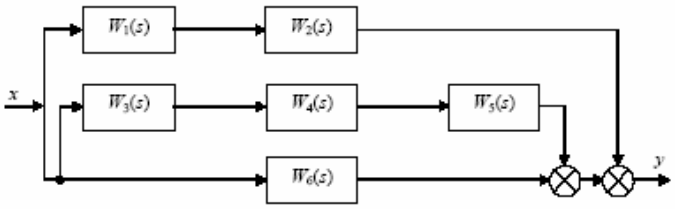
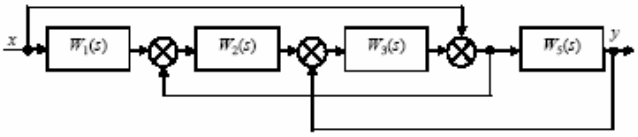
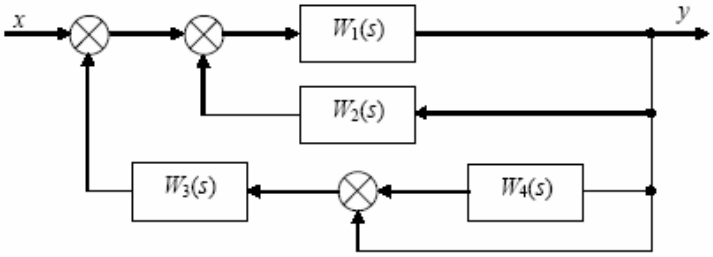
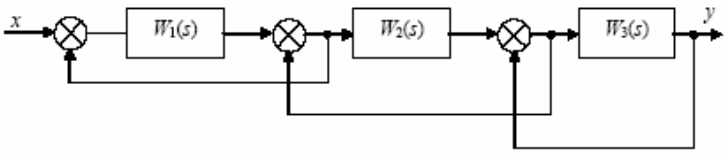
№ варианта	Передаточная функция $W(s)$	№ варианта	Передаточная функция $W(s)$
0	$\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$	5	$\frac{s+1}{(3s+1)(2s+1)}$
1	$\frac{4s+1}{(2s+1)(s+2)}$	6	$\frac{2s+3}{(3s+1)(4s+3)}$
2	$\frac{2s+3}{(2s+1)(s+3)}$	7	$\frac{5s+4}{(2s-3)(4s+3)}$
3	$\frac{2s+5}{(3s+2)(2s+4)}$	8	$\frac{3s+2}{(2s+1)(s+2)}$
4	$\frac{3s+2}{(3s+4)(s+1)}$	9	$\frac{s+2}{(2s+1)(3s+2)}$

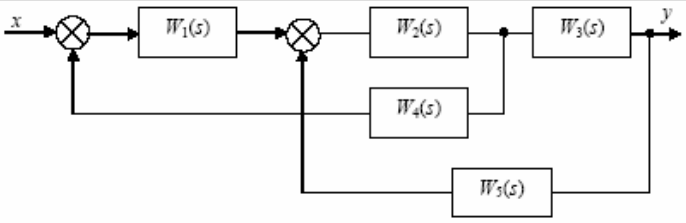
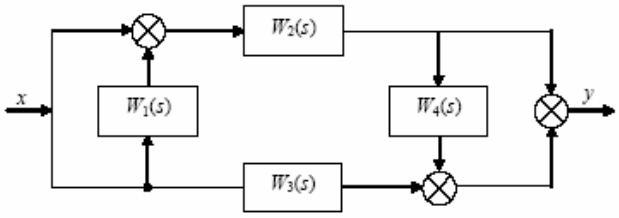
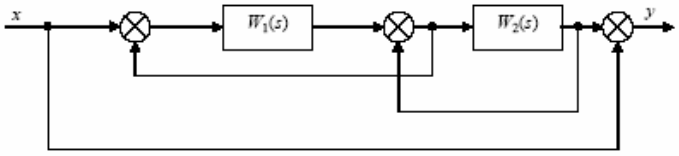
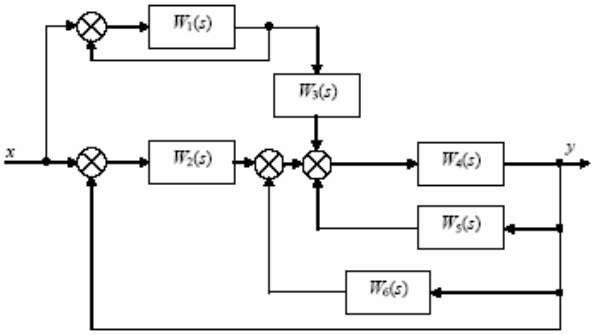
***Задача* 5**

Вывести передаточную функцию для заданной структурной схемы (табл. 5).

Таблица 5

№ варианта	Структурная схема
0	

№ варианта	Структурная схема
1	
2	
3	
4	
5	

	
7	
8	
9	

Задача 6

Исследовать на устойчивость систему автоматического регулирования, схема которой приведена на рис. 1 (табл. 6):

1) с помощью критерия Рауса–Гурвица;
2) с помощью критерия Михайлова.

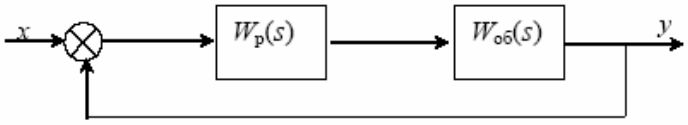


Рис. 1

Таблица 6

№ варианта	$W_р(s)$	$W_{об}(s)$
0	$\frac{4+3s}{s}$	$\frac{3s+1}{3s^3+2s^2+s+1}$
1	$1+2s$	$\frac{3}{2s^4+s^3+2s^2+3s+4}$
2	$\frac{3+s}{s}$	$\frac{2}{3s^3+s^2+s+1}$
3	$3s+2$	$\frac{4}{4s^4+3s^3+2s^2+2}$

4	$\frac{6}{s}$	$\frac{2s^2+1}{3s^3+3s^2+2s+3}$
5	2	$\frac{s^2+5}{3s^4+s^3+5s^2+s+1}$
6	$3s+1$	$\frac{3s^2+s+1}{s^4+2s^3+2s^2+s+5}$
7	$\frac{1}{2s}$	$\frac{s+2}{s^3+2s^2+s+4}$
8	$4s+1$	$\frac{4}{s^4+2s^3+7s^2+s+6}$
9	$\frac{3s+2}{s}$	$\frac{2s+3}{s^3+2s^2+s+10}$

Задача 7

Исследовать на устойчивость с помощью критерия Найквиста систему автоматического регулирования, схема которой приведена на рис. 2 (табл. 7).

Рис. 2

Таблица 7

№ варианта	$W_р(s)$	$W_{об}(s)$
0	$3+\frac{1}{2s}$	$\frac{5}{3s+1}$
1	$6+\frac{1}{s}$	$\frac{10}{2s+1}$
2	$4+\frac{1}{s}$	$\frac{10}{s+1}$
3	$7+\frac{2}{s}$	$\frac{6}{s+1}$
4	$6+\frac{2}{s}$	$\frac{4}{s+2}$
5	$5+\frac{2}{2s}$	$\frac{6}{s+8}$
6	$10+\frac{1}{s}$	$\frac{3}{2s+3}$
7	$4+\frac{2}{s}$	$\frac{2}{3s+1}$
8	$1+\frac{2}{s}$	$\frac{4}{5s+1}$
9	$3+\frac{2}{s}$	$\frac{15}{2s+1}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Контрольная работа 1

***Задача* 1.** Найти оригиналы по заданным изображениям, используя преобразование Лапласа:

$$F_1(s) = \frac{4\,e^{-s}}{(s+3)^2}, \qquad F_2(s) = \frac{3s+7}{s^3(s^2+6s+13)}.$$

По таблице преобразования Лапласа и свойствам преобразования Лапласа найдем

$$F_1(t) = 4I(t-1)te^{-3(t-1)},$$

где I – единичная функция.

Для определения преобразования Лапласа от дроби $F_2(s)$ необходимо эту правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших дробей, которые определяются в соответствии с корнями характеристического уравнения и по которым преобразование Лапласа можно взять, используя таблицы преобразования; рассматриваемая дробь имеет три нулевых корня и пару комплексно-сопряженных корней, поэтому она разлагается на простейшие дроби следующим образом:

$$F_2(s) = \frac{3s+7}{s^3(s^2+6s+13)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{(s^2+6s+13)} =$$

$$= \frac{As^2(s^2+6s+13) + Bsp(s^2+6s+13) + C(s^2+6s+13) + (Ds+E)s^3}{s^3(s^2+6s+13)}.$$

В результате разложения получена сумма простейших дробей, коэффициенты которых определяются методом неопределенных коэффициентов, для чего рассматривается равенство двух дробей. Две правильные рациональные дроби равны между собой, если равны их числители и знаменатели. Так как знаменатели равны, то, следовательно, необходимо приравнять друг к другу и числители. Приравняв в числителях коэффициенты при одинаковых степенях параметра s, получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} A + D = 0; \\ 6A + B + E = 0; \\ 13A + 6B + C = 0; \\ 13B + 6C = 3; \\ 13C = 7. \end{cases}$$

Решение системы дает следующие корни:

$$A = -\frac{73}{2197}; \quad B = -\frac{3}{169}; \quad C = \frac{7}{13}; \quad D = \frac{73}{2197}; \quad E = \frac{477}{2197}.$$

Таким образом, исходная дробь записывается в виде

$$F_2(p) = \frac{7}{13}\frac{1}{s^3} - \frac{3}{169}\frac{1}{s^2} - \frac{73}{2197}\frac{1}{s} + \frac{1}{2197}\frac{73s+477}{s^2+6s+13}.$$

В соответствии с таблицами преобразований Лапласа оригинал имеет вид

$$F_2(t) = \frac{7}{26}t^2 - \frac{3}{169}t - \frac{73}{2197} + \frac{73}{2197} + e^{-3t}\cos 2t + \frac{129}{2197}e^{-3t}\sin 2t.$$

***Задача* 2.** С помощью преобразования Лапласа решить дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями:

$$y^{III} - y^{II} = e^{-2t};$$
$$y(0) = 0;\ y^{I}(0) = 0;\ y^{II}(0) = 0.$$

При решении уравнения с использованием преобразования Лапласа необходимо его преобразовать по Лапласу с учетом начальных условий:

$$y(s)s^3 - y(s)s^2 = \frac{1}{(s+2)}.$$

Из последнего выражения определяется $y(s)$, которое и является решением уравнения, но оно записано в терминах преобразования Лапласа. Для получения решения уравнения во временной области полученная дробь разлагается на простейшие дроби, от которых в последствии по таблицам необходимо взять обратное преобразование Лапласа. В результате разложения получаем следующее выражение:

$$y(s) = \frac{1}{(s+2)s^2(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s-1} =$$
$$= \frac{As^2(s-1) + B(s+2)s(s-1) + C(s+2)(s-1) + D(s+2)s^2}{(s+2)s^2(s-1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в числителе, записываем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} A + B + D = 0; \\ -A + B + C + 2D = 0; \\ -2B + C = 0; \\ -2C = 1. \end{cases}$$

Решение системы:

$$C = -\frac{1}{2}; \quad B = -\frac{1}{4}; \quad A = -\frac{1}{12}; \quad D = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, дробь разложена на следующие простейшие дроби:

$$y(s) = -\frac{1}{12(s+2)} - \frac{1}{4s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{3(s-1)}.$$

Взяв обратное преобразование Лапласа от последнего выражения, получим

$$y(t) = -\frac{1}{12}e^{-2t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}e^{t}.$$

Функция $y(t)$ является решением дифференциального уравнения.

***Задача* 3.** По известной кривой разгона и весовой функции линейного элемента найти:

1. реакцию на входной сигнал $x(t)$;
2. весовую функцию или кривую разгона соответственно;
3. передаточную функцию элемента.

Задано: кривая разгона – $h(t) = 2t$; весовая функция – $\omega(t) = 1 - te^{-t}$; входной сигнал – $x(t) = 1 - e^{-t}\sin t$.

1) Реакция элемента на входной сигнал определяется по интегралу Дюамеля, который может быть записан через кривую разгона или через весовую функцию.

Если известна кривая разгона, то интеграл Дюамеля записывается следующим образом:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t h(t-\tau)\frac{dx}{dt}d\tau,$$

следовательно,

$$y(t) = 2t + \int_0^t 2(t-\tau)(e^{-\tau}\sin(\tau) - e^{-\tau}\cos(\tau))\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-2e^{-t}\sin t + 2e^{-t}\cos t\right)t^2 + 2t^2\left(e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t\right).$$

Если известна весовая функция, то интеграл Дюамеля имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \omega(t-\tau)\,x(\tau)d\tau,$$

и тогда выходной сигнал в данной задаче будет записан как

$$y(t)=\int_0^t (1-(t-\tau)e^{-(t-\tau)})(1-e^{-\tau}\sin\tau)d\tau = = t-1+e^{-t}\sin t+te^{-t}+e^{-t}-te^{-2t}\sin t+e^{-2t}\sin t.$$

2) Между кривой разгона и весовой функцией существует взаимная связь. Если известна кривая разгона, то весовая функция определяется как $\omega(t)=h'(t)$, т.е. $\omega(t)=(2t)'=2$.

Если же известна весовая функция, то кривая разгона – $h(t)=\int_0^t \omega(t)dt$, следовательно, в нашем случае

$$h(t)=\int_0^t (1-te^{-t})\,dt = t+e^{-t}t+e^{-t}-1.$$

3) Передаточная функция, которая представляет собой отношение преобразованного по Лапласу выходного сигнала к преобразованному по Лапласу входному сигналу при нулевых начальных условиях, может быть определена как через кривую разгона, так и через весовую функцию:

$$W(s)=s\,h(s)\,,\qquad W(s)=\omega(s)\,.$$

Для нашей задачи:

$$W(s)=s\,L(2t)=s\left[\frac{2}{s^2}\right]=\frac{2}{s}\,;$$

$$W(s)=L(1-te^{-t})=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{s^2+s+1}{s(s+1)^2}\,.$$

***Задача* 4.** По известной передаточной функции элемента $W(s)$ найти его кривую разгона, весовую функцию, частотные характеристики – АФХ, ФЧХ, АЧХ, ВЧХ, построить графики. Записать дифференциальное уравнение элемента, связывающее выходную координату и входную координату.

Задана следующая передаточная функция

$$W(s)=\frac{3s+4}{(2s+3)(4s+1)}\,.$$

По определению передаточная функция представляет собой $W(s)=y(s)/x(s)$. Для получения дифференциального уравнения запишем $y(s)/x(s)=(3s+4)/((2s+3)(4s+1))$. Полученное выражение преобразуем следующим образом:

$$y(s)((2s+3)(4s+1))=x(s)(3s+4)$$

или

$$8s^2y(s)+14sy(s)+3y(s)=3sx(s)+x(s)\,,$$

но это есть не что иное, как дифференциальное уравнение, но записанное в терминах преобразования Лапласа. Для получения дифференциального уравнения в привычной временной форме записи необходимо взять обратное преобразование Лапласа с учетом нулевых начальных условий, т.е.

$$8y''+14y'+3y=3x'+4x\,.$$

Временные характеристики: кривая разгона и весовая функция связаны с передаточной функцией соотношениями

$$h(t)=L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right),\qquad \omega(t)=L^{-1}(W(s))\,.$$

Таким образом, кривая разгона определяется выражением

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{3s+4}{(2s+3)(4s+1)s}\right]=\frac{4}{3}-\frac{1}{30}e^{-\frac{3}{2}t}-\frac{13}{10}e^{-\frac{t}{4}},$$

а весовая функция выражением

$$\omega(t)=L^{-1}\left[\frac{3s+4}{(2s+3)(4s+1)}\right]=\frac{1}{20}e^{-\frac{3}{2}t}+\frac{13}{40}e^{-\frac{t}{4}}\,.$$

Кроме того, если определена кривая разгона, то весовая функция может быть получена по ней, так как они связаны между собой формулой $\omega(t)=h'(t)$, т.е. имеем $\omega(t)=\frac{1}{20}e^{-\frac{3}{2}t}+\frac{13}{40}e^{-\frac{t}{4}}$.

Графики функций $h(t)$ и $\omega(t)$ представлены на рис. 3, *а* и *б* соответственно.

Для отыскания частотных характеристик в передаточной функции производится замена – $s = i\omega$, т.е. $W(i\omega) = \dfrac{3i\omega + 4}{(2i\omega + 3)(4i\omega + 1)}$.

Амплитудно-фазовая характеристика является комплексной функцией, которую записывают в показательной форме с выделением амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и фазо-частотной характеристики (ФЧХ) или в алгебраической форме с выделением вещественно-частотной характеристики (ВЧХ) и мнимой частотной характеристики (МЧХ).

Показательная форма записи АФХ имеет вид

$$W(i\omega) = M(\omega)e^{i\varphi(\omega)}.$$

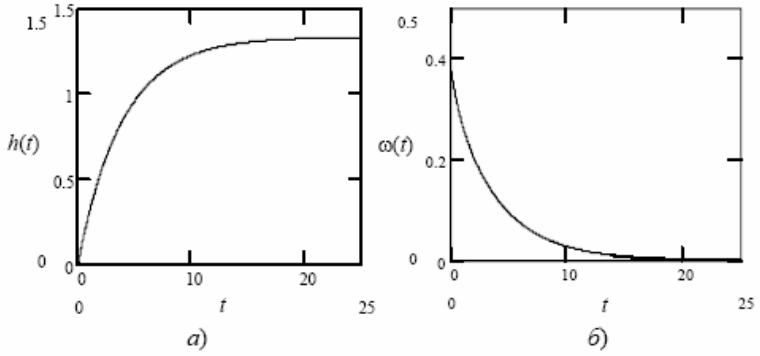


Рис. 3 Временные характеристики:
а – кривая разгона; *б* – весовая функция

Рассматриваемый элемент является линейным и поэтому для него выполняется принцип суперпозиции, в связи с которым его амплитудно-частотная характеристика определяется как отношение АЧХ числителя к АЧХ знаменателя, так выражение для АФХ представляет собой дробь, т.е. $M(\omega) = M_{\text{чис}}(\omega)/M_{\text{зн}}(\omega)$. Числитель и знаменатель АФХ записаны в алгебраической форме, в этом случае модуль определяется как $M(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)}$.

Таким образом, выражение для АЧХ запишется в виде

$$M(\omega) = \frac{\sqrt{16 + 9\omega^2}}{\sqrt{9 + 4\omega^2}\sqrt{1 + 16\omega^2}}.$$

Фазо-частотная характеристика определяется как разность фаз числителя и знаменателя – $\varphi(\omega) = \varphi_{\text{чис}}(\omega) - \varphi_{\text{зн}}(\omega)$, которые, в свою очередь, определяются как $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,(\mathrm{Im}(\omega)/\mathrm{Re}(\omega))$, если известна алгебраическая запись комплексной функции.

Таким образом, получаем следующее выражение для ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{3\omega}{4} - \mathrm{arctg}\frac{2\omega}{3} - \mathrm{arctg}\ 4\omega.$$

Амплитудно-фазовая характеристика в показательной форме записывается в виде

$$W(i\omega) = \frac{\sqrt{16 + 9\omega^2}\,e^{\mathrm{arctg}\frac{3\omega}{4}}}{\sqrt{9 + 4\omega^2}\,e^{\mathrm{arctg}\frac{2\omega}{3}}\sqrt{1 + 16\omega^2}\,e^{\mathrm{arctg}\,4\omega}}.$$

Графики функции $M(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ представлены на рис. 4, *а* и *б*. Анализ характера АЧХ и ФЧХ показывает, что

$$\omega \to 0, \quad \varphi \to 0; \quad \omega \to \infty, \quad M \to -\frac{\pi}{2}.$$

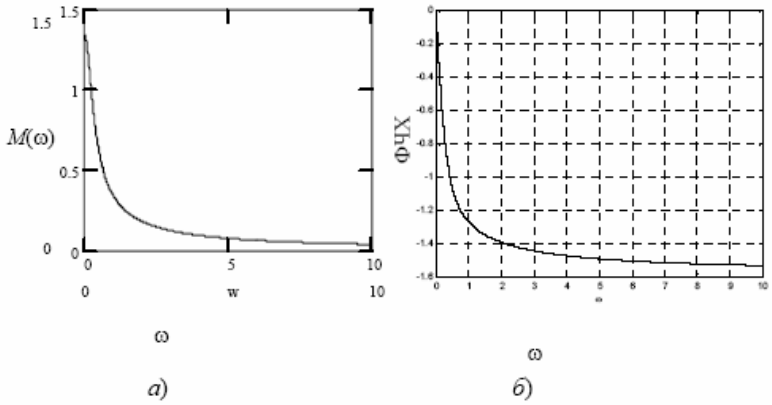


Рис. 4 Частотные характеристики:
а – АЧХ; *б* – ФЧХ

Годограф АФХ $W(i\omega)$ представлен на рис. 5.

Запишем теперь выражение для АФХ в алгебраической форме, для этого надо освободиться от мнимости в знаменателе. С этой целью умножим и знаменатель, и числитель на сопряженные выражения относительно комплексных составляющих знаменателя.

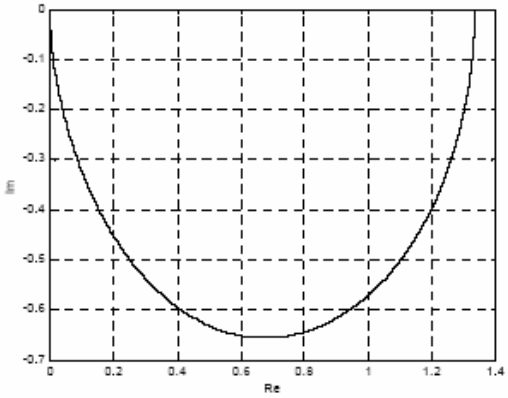


Рис. 5 Годограф АФХ

Проведем следующие математические преобразования:

$$W(i\omega)=\frac{(3i\omega+4)(3-i2\omega)(1-4i\omega)}{(3+i2\omega)(1+4i\omega)(3-i2\omega)(1-i4\omega)}=\frac{10\omega^2+12-i24\omega^3-i47\omega}{(9+4\omega^2)(1+16\omega^2)}.$$

Из последнего выражения записываем:

ВЧХ

$$\mathrm{Re}(\omega)==\frac{10\omega^2+12}{(9+4\omega^2)(1+16\omega^2)},$$

МЧХ

$$\mathrm{Im}(\omega)=\frac{-i24\omega^3-i47\omega}{(9+4\omega^2)(1+16\omega^2)}.$$

График функции $\mathrm{Re}(\omega)$ представлен на рис. 6.

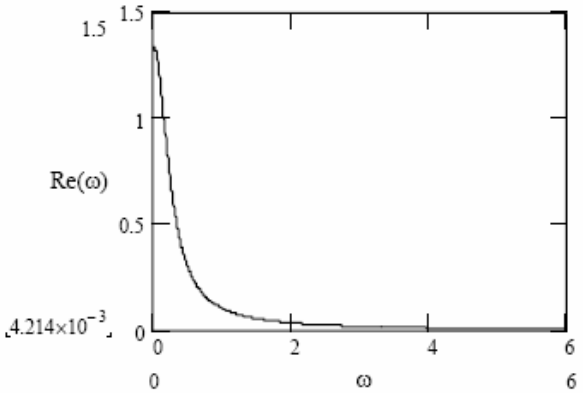


Рис. 6 Вещественно-частотная характеристика

***Задача* 5.** Преобразовать структурную схему (рис. 7) и записать передаточную функцию. Считается, что известны передаточные функции отдельных элементов и входной сигнал.

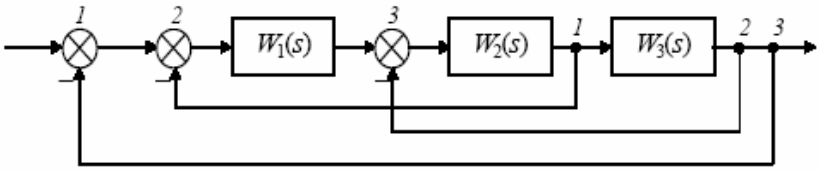


Рис. 7 Структурная схема

Для записи передаточной функции сложной структурной схемы ее необходимо преобразовать в соответствии с правилами преобразования структурных схем. Для того чтобы развязать перекрестные связи в заданной структурной схеме, перенесем узел *1* через звено с передаточной функцией $W_3(s)$ и через узел *2* в соответствии с правилами преобразования структурных схем. В результате проведенных преобразований получаем структурную схему (рис. 8), в которой четко прослеживаются основные типы соединений: последовательное соединение и вложенные друг в друга соединения с обратной связью.

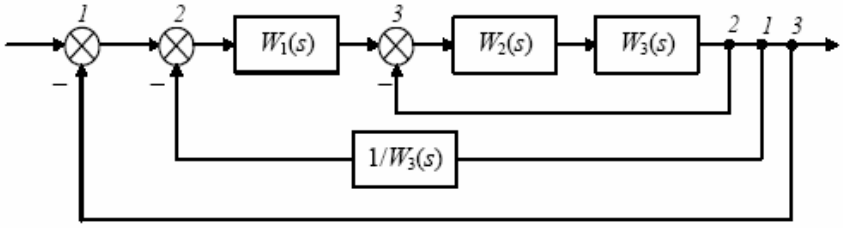


Рис. 8 Преобразованная структурная схема

Записывая последовательно передаточные функции отдельных элементов схемы, придем к выражению передаточной функции всей схемы:

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s) + W_2(s)W_3(s) + W_1(s)W_2(s)W_3(s)}.$$

***Задача* 6.** Исследовать устойчивость системы автоматического регулирования (рис. 9):

1) с помощью критерия Рауса–Гурвица;
2) с помощью критерия Михайлова.

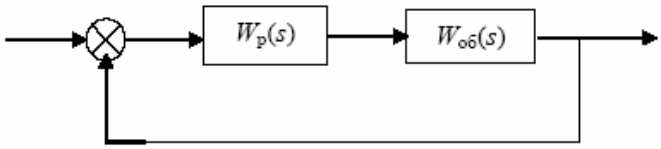


Рис. 9 Структурная схема системы автоматического регулирования

Заданы следующие исходные данные: передаточные функции объекта и регулятора

$$W_р(s) = \frac{5}{2s}; \qquad W_об(s) = \frac{3s+2}{s^3 + 2s^2 + s + 3}.$$

1) Для исследования устойчивости систем автоматического регулирования с помощью критерия Рауса–Гурвица необходимо знать дифференциальное или характеристическое уравнение системы. Знаменатель передаточной функции всегда представляет собой характеристический полином, поэтому необходимо, прежде всего, записать передаточную функцию замкнутой одноконтурной системы (рис. 9):

$$W_{зс}(s) = \frac{W_об(s)W_{рег}(s)}{1 + W_об(s)W_{рег}(s)}.$$

Характеристическое уравнение определяется путем приравнивания к нулю знаменателя передаточной функции замкнутой системы

$$W_{рег}(s)W_об(s) + 1 = 0,$$

с учетом конкретных значений передаточных функций объекта и регулятора получим

$$\frac{2s^4+4s^3+2s^2+21s+10}{2s^4+4s^3+2s^2+6s}=0,$$

откуда характеристическое уравнение запишется в виде

$$2s^4+4s^3+2s^2+21s+10=0.$$

Задачу будем решать с использованием формулировки критерия устойчивости по Гурвицу. Для этого необходимо из коэффициентов характеристического уравнения составить главный определитель Гурвица по определенному правилу: вдоль главной диагонали записываются коэффициенты, начиная с a_{n-1}, выше главной диагонали записываются коэффициенты с индексом на единицу меньше, ниже главной диагонали записываются коэффициенты с индексом на единицу больше. Порядок определителя соответствует порядку характеристического уравнения. Из этого определителя составляются диагональные миноры, которых должно быть $n-1$.

Система автоматического управления будет устойчивой тогда и только тогда, когда все диагональные миноры главного определителя будут положительны.

Для нашей задачи главный определитель Гурвица имеет вид

$$\begin{vmatrix} 4 & 21 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 21 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}.$$

Вычислим последовательно диагональные миноры:

$$\Delta_1=4>0; \qquad \Delta_2=8-42=-34<0;$$

$$\Delta_3=4\cdot(42-40)-21\cdot 42=-874<0; \qquad \Delta_4=-874\cdot 10=-8740<0.$$

Все диагональные миноры отрицательны, следовательно, *система неустойчива.* Следует отметить, что для исследования устойчивости не обязательно вычислять все миноры. Если при вычислении миноров получают, что его значение отрицательно, дальнейшие расчеты можно прекратить и сделать вывод, что система неустойчива.

2) Исследуем эту же систему автоматического управления на устойчивость с использованием частотного критерия устойчивости Михайлова.

В соответствии с этим критерием необходимо построить годограф Михайлова, который для устойчивых систем имеет строго определенный вид. И тогда система автоматического управления будет устойчивой, если годограф Михайлова начинается на положительной вещественной полуоси, обходит последовательно, нигде не обращаясь в нуль, n квадрантов координатной плоскости, уходя в бесконечность в n квадранте, где n – порядок характеристического уравнения.

Для записи математического выражения годографа Михайлова необходимо в характеристическом уравнении перейти в частотную область, т.е. в уравнении $2s^4+4s^3+2s^2+21s+10=0$ сделать замену – $s=i\omega$. В результате получим комплексное выражение

$$2\omega^4-4i\omega^3-2\omega^2+21i\omega+10=0,$$

в котором выделим вещественную часть –

$$\varphi(\omega)=2\omega^4-2\omega^2+10=0$$

и мнимую часть –

$$\psi(\omega)=-4\omega^3+21\omega=0.$$

Первая называется вещественной функцией Михайлова, а вторая – мнимой функций Михайлова.

По вещественной и мнимой функциям Михайлова строится годограф Михайлова в координатах $\varphi(\omega)-\psi(\omega)$ методом контрольных точек. Для этого задается значение частоты, для

которой определяются значения функций $\varphi(\omega), \psi(\omega)$. График годографа Михайлова представлен на рис. 10, его анализ показывает, что годограф начинается на вещественной положительной полуоси и располагается только в первом квадранте, что свидетельствует о том, что система неустойчива.

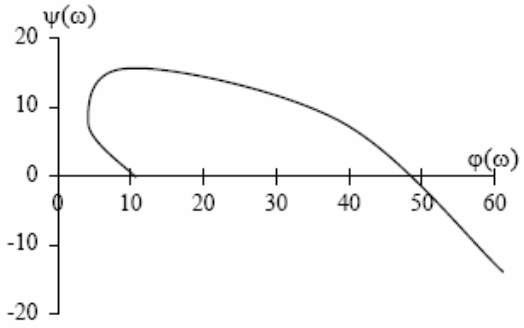


Рис. 10 Годограф Михайлова

На практике для исследования устойчивости систем автоматического управления удобно пользоваться не критерием Михайлова, а следствием из этого критерия. Для этого необходимо записать уравнения, которые получаются приравниванием к нулю вещественной мнимой функций Михайлова, найти их корни. Следствие гласит, для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы корни уравнений $\psi(\omega)=0$, $\varphi(\omega)=0$ были действительными чередующимися между собой и выполнялись условия $\varphi(0)\geq 0,\ \psi(0)\leq 0$.

Для ответа на вопрос об устойчивости системы необходимо решить следующие уравнения:

$$\varphi(\omega)=2\omega^4-2\omega^2+10=0;$$

$$\psi(\omega)=-4\omega^3+21\omega=0.$$

В результате решения этих уравнений получаем, что корни уравнения $\psi(\omega)=0$ – $\omega_1=0,\ \omega_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{21}{4}}$, а уравнения $\varphi(\omega)=0$ – $\omega_{4,5}=\pm\sqrt{\frac{1+i\sqrt{19}}{2}}$, $\omega_{6,7}=\pm\sqrt{\frac{1-i\sqrt{19}}{2}}$. Как видно из расчетов, корни не чередуются и даже являются комплексно-сопряженными, что свидетельствует о том, что *система неустойчива*.

***Задача* 7.** Исследовать на устойчивость систему автоматического регулирования (рис. 11) с помощью критерия Найквиста.

Исходными данными являются передаточные функции объекта и регулятора:

$$W_{\text{р}}(s)=7+\frac{1}{s};\qquad W_{\text{об}}(s)=\frac{5}{3s+1}.$$

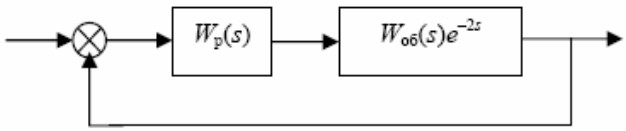


Рис. 11 Структурная схема АСР с запаздыванием

Критерий устойчивости Найквиста, в отличие от предыдущих критериев, применяется для исследования устойчивости систем автоматического управления с запаздыванием, поэтому в данной задаче рассматривается объект с запаздыванием. Критерий Найквиста дает ответ об устойчивости замкнутой системы по АФХ разомкнутой системы. Он имеет три формулировки в зависимости от того устойчива, нейтральна или неустойчива разомкнутая система. Поэтому, прежде всего, необходимо ответить на вопрос об устойчивости разомкнутой системы.

Исследуем на устойчивость разомкнутую систему известными методами. Для записи передаточной функции разомкнутой системы разорвем обратную связь в замкнутой системе. Разомкнутая система представляет собой последовательно соединенные между собой объект и регулятор, ее передаточная функция запишется в виде

$$W_{\text{рс}} = W_{\text{р}}(s) W_{\text{об}}(s) e^{-2s} = \frac{7s+1}{s} \frac{5}{3s+1} e^{-2s} .$$

Характеристическое уравнение разомкнутой системы – это знаменатель передаточной функции, приравненный к нулю, будет

$$s(3s+1) = 0 .$$

Корни характеристического уравнения $s_1 = 0,\ s_2 = -1/3$. В соответствии с необходимым и достаточным условием устойчивости разомкнутая система будет нейтральной. Критерий Найквиста в этом случае звучит: если разомкнутая система нейтральна, то для того чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы с добавлением в бесконечность не охватывала точку (–1, i0).

Для ответа на вопрос об устойчивости замкнутой системы по критерию Найквиста проще всего построить АФХ разомкнутой системы и посмотреть охватывает она точку (–1, i0) или нет, поэтому запишем выражение для АФХ разомкнутой системы:

$$W_{\text{рс}}(i\omega) = \frac{7i\omega+1}{i\omega} \frac{5}{3i\omega+1} e^{-2i\omega} = \frac{\sqrt{25+(35\omega)^2}\, e^{\operatorname{arctg}\frac{35\omega}{5}}\, e^{-2i\omega}}{\sqrt{1+9\omega^2}\, e^{\operatorname{arctg} 3\omega}\, \omega e^{\frac{\pi}{2}}} ,$$

откуда АЧХ:

$$M_{\text{рс}}(\omega) = \frac{\sqrt{25+(35\omega)^2}}{\sqrt{1+9\omega^2}} ,$$

ФЧХ:

$$\varphi_{\text{рс}} = -2\omega + \operatorname{arctg} 7\omega - \operatorname{arctg} 3\omega - \frac{\pi}{2} .$$

Задаваясь значениями частот построим годограф АФХ разомкнутой системы (рис. 12). Как видно из рисунка АФХ разомкнутой системы охватывает точку (–1, i0), что говорит о том, что замкнутая система *неустойчива*.

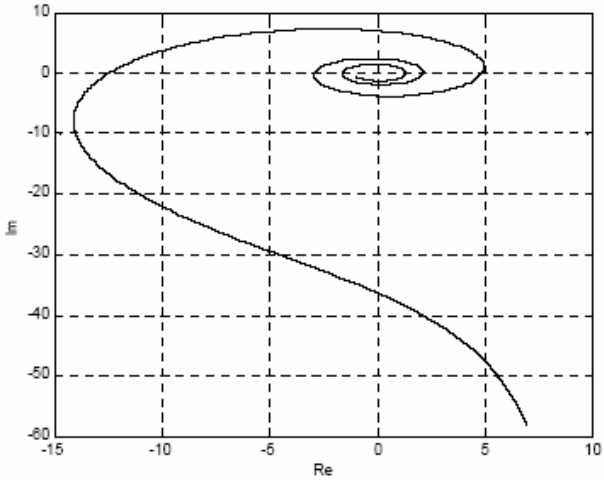


Рис. 12 Годограф АФХ разомкнутой системы

Применение MATLAB

Для выполнения работы используется Control System Toolbox пакета прикладных программ MATLAB for Windows. Control System Toolbox предназначен для работы с LTI-моделями (Linear Time Invariant Models) систем управления. В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в виде комплексной передаточной функции.

Синтаксис команды, создающий LTI-систему с одним входом и одним выходом в виде передаточной функции:

`TF([bm, …, b1, b0], [an, …, a1, a0])`

где b_m, …, b_1 – значения коэффициентов числителя, a_n, …, a_1 – значения коэффициентов знаменателя.

Для выполнения работы могут применяться команды, приведенные в таблице 1.

Таблица 1. Некоторые команды Control System Toolbox

Синтаксис	*Описание*
`pole(<LTI-объект>)`	Вычисление полюсов передаточной функции
`zero(<LTI-объект>)`	Вычисление нулей передаточной функции
`step(<LTI-объект>)`	Построение графика переходного процесса
`impulse(<LTI-объект>)`	Построение графика импульсной переходной функции
`bode(<LTI-объект>)`	Построение логарифмических частотных характеристик (диаграммы Боде)
`nyquist(<LTI-объект>)`	Построение частотного годографа Найквиста

Для определения корней полиномов степени k, может, также, применятся команда `roots(P)`, которая в качестве аргумента P получает матрицу коэффициентов полинома $[p_k, \ldots, p_0]$.

Другим вариантом получения графиков динамических характеристик САУ является использование графического интерфейса LTI-viewer, вызов которого осуществляется командой `ltiview(<LTI-объект>)`, которой в качестве параметра можно указать имя переменной, содержащей LTI-объект.

Замечания:

1. Для получения протокола работы со средой MATLAB и сохранения его в виде файла перед началом работы используйте команду `diary <имя-файла>` и `diary off` в конце.
2. Получаемые графики можно скопировать в текстовый документ, используя команду меню графического окна *Edit → Copy Figure*.

Методический пример использования команд

Задана передаточная функция САУ

$$W(s) = \frac{s+2}{3s^3 + 4s^2 + 5s + 3}.$$

Найдем ее временные и частотные характеристики. Будем работать в командном режиме среды MATLAB.

1. Создадим LTI-объект с именем `w`, для этого выполним:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5 3])

Transfer function:
         s + 2
-----------------------
3 s^3 + 4 s^2 + 5 s + 3
```

2. Найдем полюса и нули передаточной функции с использованием команд `pole`, `zero`.

```
>> pole(w)

ans =

  -0.2639 + 1.0825i
  -0.2639 - 1.0825i
  -0.8055

>> zero(w)

ans =

     -2
```

3. Построим переходную функцию командой `step(w)`. Результат ее выполнения приведен на рис. 1.

4. Построим импульсную характеристику командой `impulse(w)`. Результат показан на рис. 2.

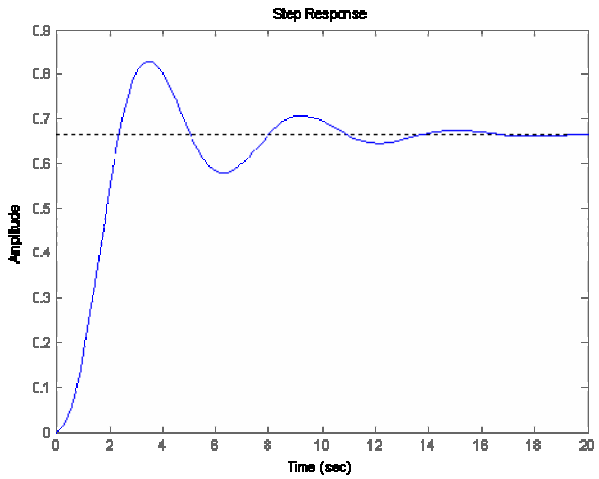


Рис. 1. Переходная функция h(t).

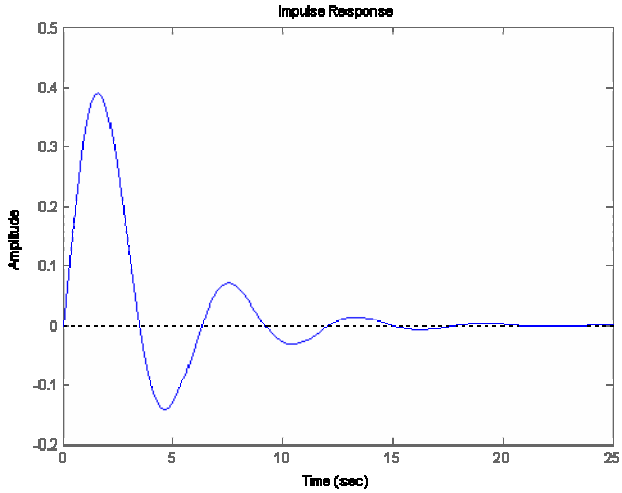


Рис. 2. Импульсная переходная функция.

5. Диаграмму Боде получим, используя команду `bode(w)` – рис. 3.

6. Определим частотный годограф Найквиста, выполнив команду `nyquist(w)` – рис. 4.

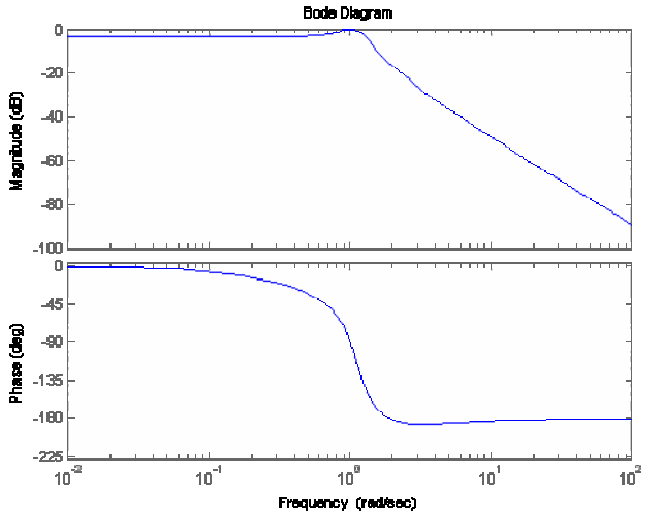


Рис. 3. Логарифмические частотные характеристики.

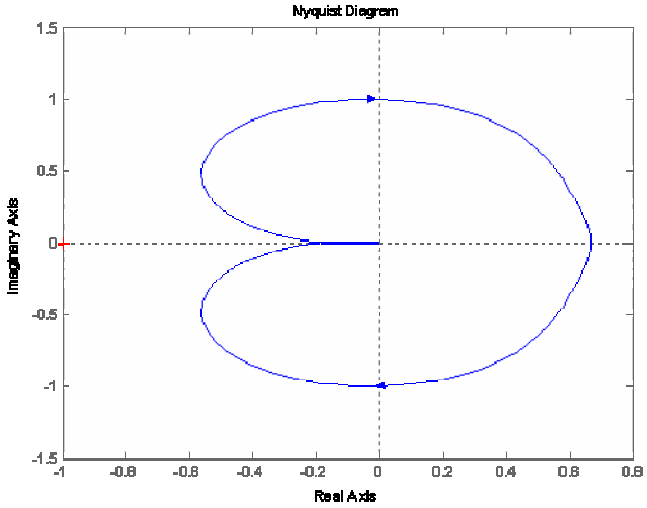


Рис. 4. Частотный годограф.

Аналогичные результаты (рис. 5) можно получить, используя команду `ltiview(w)`, с соответствующими настройками в меню *Edit* → *Plot Configuration*.

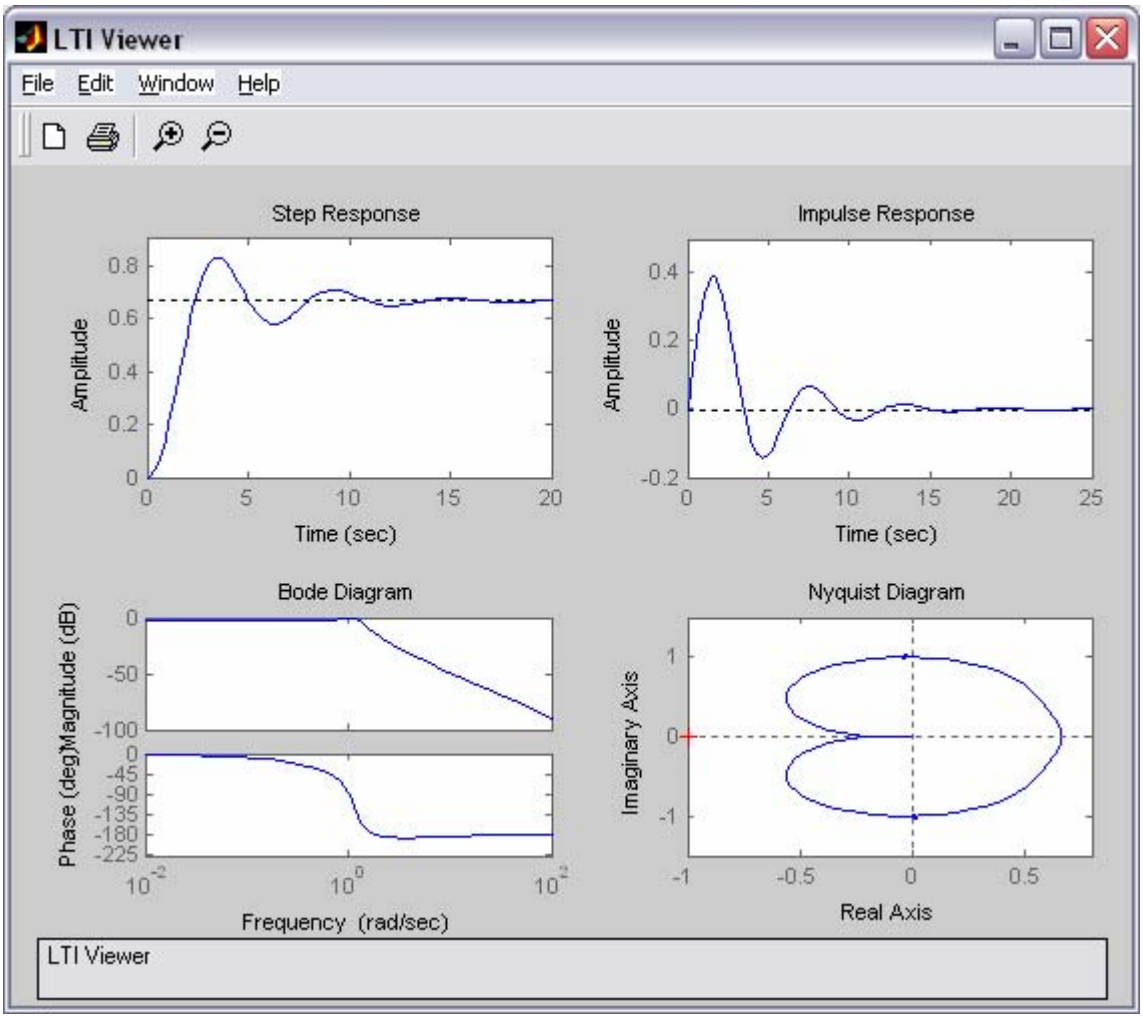


Рис. 5. LTI-viewer.

Каждая из построенных характеристик полностью и однозначно определяет рассматриваемую систему управления.