Лекции по математическому анализу И.В.Каменева.

Факультет Прикладной Математики МГИЭМ

3-ий семестр. Осень 1999г.

Содержание.

От студента.

Это было первого сентября, когда мы только что пришли в институт. На второй паре наш поток из четырех групп заполнил огромную ступенчатую аудиторию и с нетерпением стал ждать. Ровно в 10^{15}, со звонком, в аудиторию вбежал невысокий человек в куртке цвета хаки и, не представляясь, начал читать лекцию. Читал он очень быстро, уверенно, доска была строго распределена, для каждой формулы находилось свое место... Выходя из аудитории мы были удивлены и несколько напуганы. Именно тогда я понял, как должен выглядеть настоящий лектор. Позже мы привыкли к странной, казалось пришедшей из прошлого века, лексике, к быстрой руке, выводившей слабо-понятные, но красивые формулы Математического Анализа, и к сосредоточенному на математике преподавателю - Игорю Витальевичу Каменеву.

Нам начали нравиться лекции и семинары - а у некоторых из нас Игорь Витальевич вел и семинарские занятия - мы стали использовать "крылатые выражения" Игоря Витальевича. Это неожиданно сплотило наш поток - у нас был свой специфический и красивый язык, по которому мы всегда отличали "своих", у нас всегда была тема для разговоров - шутки Игоря Витальевича многократно цитировались, попадали в fido и Internet...

Уже будучи студентом второго курса, заметив группку первокурсников, обращающихся друг к другу: "Батенька,...", мы понимали - это тоже "свои". К ним можно подойти и сказать "это доказательство просто вульгарно", и услышать в ответ что-нибудь о "толстом Фихтенгольце". Сегодня я плохо представляю себе, как мы сможем дальше учиться, если у нас не будет Игоря Витальевича.

Студент ФПМ, Мастер М. А.

ГЛАВА **I**

Функциональные последовательности и ряды

.

§1. Понятие равномерной сходимости.

§1.a. Сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Рассмотрим функциональную поледовательность

$$f_n(x), \quad x \in E, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

Определение $\triangleleft \triangleleft$ 1.1. *Функциональная последовательность (1.1) называется сходящейся в точке $x_0 \in E$, если сходится числовая последовательность $f_n(x_0)$, т.е. если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.* *1.1. $\triangleright \triangleright$*

Определение $\triangleleft \triangleleft$ 1.2. *Функциональная последовательность (1.1) называется* сходящейся на множестве E*, если она сходится в каждой точке этого множества, т.е. если $\exists$ $f(x)$ такая, что $\forall\, x \in E$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. При этом функция $f(x)$ называется ет предельной функцией данной функциональной последовательности на множестве .* *1.2. $\triangleright \triangleright$*

Если функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится в каждой точке множества E, то говорят, что у данной функциональной последовательности на множестве E имеется *поточечная сходимость*.

Определение $\triangleleft \triangleleft$ 1.3. *последовательность (1.1) называется сходящейся на множестве E к предельной функции $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ такое что из $n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $(\forall x \in E)$.* *1.3. $\triangleright \triangleright$*

Пример ◀1.1. Рассмотрим функциональную последовательность (сокращённо ф.п.) $f_n(x) = x^n$ на множестве $E = (0, 1)$. Для всякого фиксированного $x \in E$ числовая последовательность $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Например, если $x = 5/7$, то $(5/7)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. И так будет для всякой точки x из $(0, 1)$.

Отсюда мы делаем вывод, что функциональная последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится к 0 для всех $x \in (0; 1)$, или, другими словами, ф.п. x^n сходится на $(0; 1)$ к *предельной функции* $f(x) = 0\,\Big|_{x\in(0;1)}$.

Это можно доказать по опрелению **I**.1.3.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(x,\varepsilon) = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} + 1\right], \quad \text{такое что}$$
$$\forall\, n > N(x,\varepsilon)\,,\ n \in \mathbb{N} \quad \text{выполнено неравенство}$$
$$\boxed{|x^n - 0| < \varepsilon}$$

Действительно, пусть мы задались произвольным $\varepsilon > 0$ и взяли $N(x,\varepsilon) = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} + 1\right]$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N},\ n > N(x,\varepsilon)$ имеем: $n > \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|} + 1\right] > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$;

откуда $\boxed{n\ln|x| < \ln\varepsilon}$ (при умножении на отрицательное число $\ln|x|$, где $|x| < 1$ знак неравенства изменился на противоположный)

$\Longrightarrow \ln|x|^n < \ln\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|x|^n < \varepsilon}$

Так мы по определению доказали *поточечную сходимость* функциональной последовательности $f_n(x) = x^n$ к своей предельной функции $f(x) = 0$ на $x \in (0;1)$. **1.1.** ▶

Замечание □ *1.1.* Забегая вперед, отметим, что если в определении **I**.1.3 номер N зависит только от ε и не зависит от x, т.е. годится любой θ, то такая полседовательность называется *сходящейся равномерно* на E. *1.1.* □

Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots \tag{1.2}$$

Определение ◁ ◁ *1.4.* *Функциональный ряд (1.2) называется* **сходящимся** на множестве E, *если он сходится в* $\forall$ *точке* E, *т.е. если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, *где* $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)$, *т.е.* $S_n(x)$ *- частичная сумма функционального ряда (1.2)* *1.4.* ▷ ▷

Определение ◁ ◁ *1.5.* *Функциональный ряд (1.2) называется* **абсолютно сходящимся** на множестве E_1 , *если сходится функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ U_n(x)\ | \quad (\forall x \in E_1) \tag{1.3}$$

1.5. ▷ ▷

Определение ◁ ◁ *1.6.* *Множество* E *такое, что*

1) *Функциональный ряд (1.2) сходится* $\forall x \in E$

2) *Функциональный ряд (1.2) расходится* $\forall x \notin E$

называтеся областью сходимости данного ряда. *1.6.* ▷ ▷

Замечание □ *1.2.* В определениях (**I**.1.6) и (**I**.1.5), область сходимости не обязательно является областью абсолютной сходимости. *1.2.* □

Замечание □ *1.3.* Если $E_1 \neq E$ то разность $E - E_1$ называется областью условной сходимости функционального ряда (1.2). *1.3.* □

Замечание □ *1.4.* Если $U_n(x) \geq 0$, то $E_1 = E$. *1.4.* □

Примеры ◀1.2.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; $E_1 = E = (1; +\infty)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$; $E = (0; +\infty)$, $E_1 = (1; +\infty)$.

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + (-1)^n}$; $E = (\frac{1}{2}; +\infty)$, $E_1 = (1; +\infty)$.

1.2. ▶

Упражнение ◁ □ *1.1.* Найти E и E_1 для

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi * n}{4})}{n^x + \sin(\frac{\pi * n}{4})}.$$

б)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n^x + (-1)^n]^\lambda}.$$

1.1. □ ▷

§1.б. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x),\ x \in E,\ n \in \mathbb{N}, \quad \text{и пусть } f_n(x) \text{ сходится на } E, \text{ т.е. } \exists\, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{1.4}$$

Определение ◁ ◁ *1.7.* *Скажем, что последовательность* f_n **сходится** *к своей предельной функции* $f(x)$ **равномерно** на множестве E , *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \ \textit{не зависящее от } x\,, \quad \textit{такое, что}$$

$$\forall n > N(\varepsilon),\ \ n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon}\ \ (\forall x \in E)$$

1.7. ▷ ▷

Замечание □ *1.5.* Введем обозначения сходимости $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ и равномерной сходимости $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ *1.5.* □

Замечание □ *1.6.* В определении равномерной сходимости **существенны** указанные **множества**, о которых идет речь, ибо одна и та же функциональная последовательность на одном множестве сходится равномерно, а на другом - нет. *1.6.* □

Замечание □ *1.7.* Функциональная последовательность (1.1) называется неравномерно сходящейся на множестве E, если она сходится на множестве E, но не является равномерно сходящейся на данном множестве. *1.7.* □

Упражнение ◁ □ *1.2.* Дать определение неравномерной сходимости в полном смысле. *1.2.* □ ▷

Пример ◀1.3. Пример равномерно сходящейся последовательности.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad E = [1; +\infty)$$

Предельной функцией для этой функциональной последовательности будет

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \qquad (\forall x \in E)$$

(Предел вычисляется при всяком фиксированном x)
Докажем по определению, что имеет место равномерная сходимость. Рассмотрим разность $|f_n(x) - f(x)|$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

Оценим сверху эту функцию величиной, не зависящей от x. Найдём наибольшее значение этой функции на E для всякого фиксированного n. Для этого заметим, что $\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ монотонно убывает правее $\dfrac{1}{n}$, в чём легко убедиться, взяв производную.

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{n\cdot\left(1-n^2x^2\right)}{\left(1+n^2x^2\right)^2} = \frac{-n^3(x-1/n)(x+1/n)}{\left(1+n^2x^2\right)^2} \tag{1.5}$$

Производная меньше нуля и функция монотонно убывает при $x > \dfrac{1}{n}$, а значит и при $x > 1$. Значит, наибóльшее значение функция $\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ принимает на левой границе множества $E = [1; +\infty)$ т.е. при $x = 1$.

$$\Longrightarrow \max_{x\,\in\,E} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in E} \frac{nx}{1+n^2x^2} = f(1) = \frac{n}{1+n^2} < \frac{1}{n} \qquad (\forall x \in E) \qquad\qquad (*!!)$$

Неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{n}$ как раз и доказывает равномерную сходимость функциональной последовательности $f_n(x)$.

Действительно, воспользуемся определением **I**.1.7. Возьмём $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]$ и заметим, что $\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right] = N(\varepsilon)$ и значит

$$\frac{1}{N(\varepsilon)} = \frac{1}{[1/\varepsilon+1]} < \varepsilon\ . \qquad (\#\#*)$$

Получим

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right] \text{ такое, что } \forall\,n>N(\varepsilon) \text{ и } \forall x\in E=[1;+\infty) \quad \text{выполнено неравенство}$$

$$\boxed{|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon}$$

Это неравенство верно, поскольку

$$|f_n(x)-f(x)| \leqslant \max_{x\,\in\,E}\frac{nx}{1+n^2x^2} \overset{*!!}{=} \frac{nx}{1+n^2x^2}\Big|_{x=1} = \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\varepsilon)} \overset{(\#\#*)}{<} \varepsilon \quad \text{при} \quad n>N$$

Нам удалось выбрать ε не зависящей от x. $\Rightarrow f_n(x)$ равномерно сходится на множестве E. **1.3.** ▶

Пример ◀1.4. Рассмотрим теперь ту же самую функциональную последовательность, что и в примере **1.3** , но уже на другом множестве.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad E=[0;1]$$

Предельная функция для нашей функциональной последовательности

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (\forall x\in E)$$

Опять оценим сверху

$$|f_n(x)-f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \text{ при} x\in[0;1]$$

Эта функция не превосходит своего максимального значения на $[0;1]$, а своего максимума она достигает при $x=\frac{1}{n}=x_n$ (см. (1.5)).

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = f_n(x_n) = \frac{n\cdot 1/n}{1+n^2\cdot(1/n)^2} = \frac{1}{2}$$

Таким образом

$$\max_{x\in[0;1]}|f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{2} \not\to 0 \text{ при } n\to\infty\ .$$

Значит, $f_n(x)$ сходится не равномерно на множестве E, поскольку для всякого n удаётся подобрать такой $x=1/n$, что $|f_n(x)-f(x)|$ невозможно сделать сколь угодно малым. Такая последовательность называется "последовательностью бегущих горбов".

Видно, что одна и та же функциональная последовательность на разных множествах сходится по-разному: на множестве $[1;+\infty)$ из примера **1.3** равномерно, а на множестве $[0;1]$ из этого примера — нет. **1.4.** ▶

Определение ◁ ◁ 1.8. *Рассмотрим функциональный ряд (1.2). Пусть он сходится на множестве E, т.е.*

$$\exists S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k(x)$$

Мы скажем, что функциональный ряд (1.2) сходится равномерно на E, если на этом множестве равномерно сходится последовательность его частичных сумм:

$$S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x)\,.$$

1.8. ▷ ▷

§2. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности в терминах точной верхней грани (супремума).

Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) \quad x \in E \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Теорема ◁ 2.1:
О необходимом и достаточном условии равномерной сходимости ф.п. в терминах супремума.

Пусть $\exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(\forall x \in E)$. *Для того чтобы последовательность* $f_n(x)$ *сходилась к своей предельной функции* $f(x)$ *равномерно на множестве* E*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = d_n$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

2.1. ▷

Пример ◂2.1. Рассмотрим ф.п. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}, \quad E = (-\infty, +\infty)$.
Найдём её предельную функцию:

$$\forall x \in E \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0 \implies f(x) = 0 \text{ на } E$$

Применим теорему **I**.2.1

1) При всяком фиксированном $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \Bigg|_{x = \pm\frac{\pi n}{2}} = \frac{1}{n}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Следовательно сходимость равномерная.
2.1. ▶

Пример ◂2.2. Иссследуем ф.п. $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$; на равномерную сходимость на множестве $E = (-\infty; +\infty)$.
Найдём предельную функцию для ф.п. $f_n(x)$:

$$\forall x \in E \quad \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = 0 = f(x)\,.$$

Проверим выполнение условий теоремы **I**.2.1.

1) Для всякого фиксированного $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = \sup_E \left|\sin\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \Big|_{x = \pm\frac{\pi n}{2}} = 1$$

2) $d_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty \implies$ сходимость неравномерная.

2.2. ▶

Замечание □ *2.1.* Условие существования sup в (**I**.2.1) существенно, ибо имеются такие функциональные последовательности, для которых этот sup $\nexists$

2.1. □

Пример ◀2.3. Исследуем ф.п. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ на равномерную сходимость на множестве $E = (0, +\infty)$. Найдём предельную функцию для данной ф.п.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x + \frac{1}{n} - x}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Преобразуем $|f_n(x) - f(x)|$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)\cdot 2 \cdot \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\left|\sqrt{x} - \sqrt{x + \frac{1}{n}}\right|}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} = \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2} \to \infty \text{ при } (x \to +0)$$

При всяком фиксированном n не существует $\sup\limits_{x\in(0;+\infty)} |f_n(x) - f(x)|$, и значит, по теореме **I**.2.1 наша ф.п. не сходится равномерно на $(0; +\infty)$. **2.3. ▶**

Замечание □ *2.2.* В случае, если множество $E = [a; b]$ и $f_n(x),\ f(x) \in C[a; b]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, то критерий (**I**.2.1) может быть записан в упрощённой форме:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x), \quad (\forall x \in [a; b]) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

2.2. □

Теорема ◁ 2.2:
Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Рассмотрим функциональную последовательность (1.1)

Для того,чтобы последовательность $f_n(x)$ равномерно сходилась на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$

такое, что при любом $n > N$ и при любом $p \in \mathbb{N}$ выполнено

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E \qquad (*)$$

2.2. ▷

Замечание □ 2.3. Этот критерий формулируется без участия предельной функции. *2.3. □*

*Доказательство □ ◁ **I**.2.2.*
Необходимость.
Дано : функциональная последовательность (1.1) сходится равномерно на множестве E.
Доказать : что выполняется условие (*).
Из равномерной сходимости $\Longrightarrow$
1) $\exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(\forall x \in E)$
2) $\forall \varepsilon > 0$ по $\dfrac{\varepsilon}{2}$ найдётся $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что из $n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Поскольку $n + p > N$ (при $n > N$), то $|f_{n+p} - f(x))| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in E$
Искусственно преобразуем подмодульное выражение:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |[f_{n+p} - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leqslant$$

модуль суммы не превосходит суммы модулей

$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f_n(x)| + |f_n - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необходимость доказана.
Достаточность.
Дано : Выполнено условие (*).
Доказать : функциональная последовательность (1.1) сходится равномерно на множестве E.
1) Из "дано" следует, что последовательность $f_n(x)$ поточечно сходится на множестве E, то есть

$$\forall\, x \in E \quad \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

Действительно, при всяком фиксированном $x = \tilde{x}$ функциональная последовательность $f_n(x)$ становится *числовой* последовательностью $f_n(\tilde{x})$. При фиксированном $x = \tilde{x}$ условие $(*)$ есть в точности условие сходимости *числовой* (а не функциональной) последовательности $f_n(\tilde{x})$ из критерия Коши для *числовых* последовательностей.
Т.е., согласно *критерию Коши* для *числовых* последовательностей, при всяком $x \in E$ ф.п. $f_n(x)$ сходится (как числовая).

Эта поточечная сходимость задаёт предельную функцию: для всякого $x \in E$ определено число $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

2) Зададимся каким-нибудь $\varepsilon > 0$ и, согласно условию $(*)$, найдём такое $N(\varepsilon/2) = N_1(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon/2),\ n \in \mathbb{N}$ и для всех $p \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$$

Устремим теперь p к бесконечности. При этом $f_{n+p}(x)$ будет сходиться к предельной функции $f(x)$ — $f_{n+p}(x) \underset{p\to\infty}{\rightarrow} f(x)$. Перейдя в неравенстве к пределу, получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon\ ,$$

что и доказывает равномерную сходимость.

Для всякого $\varepsilon > 0$ мы можем указать $N_1(\varepsilon) = N(\varepsilon/2)$, такое что для всех натуральных $n > N_1(\varepsilon)$ выполнено неравенство: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. *Ч.т.д.* **I**.2.2 $\triangleright\Box$.

Следствие 1 из **I**.2.2.
(Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов).

Для того чтобы функциональный ряд (1.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **равномерно сходился** на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ \varepsilon > 0\quad \exists\ N = N(\varepsilon)\ \in \mathbb{N}$ такое, что из $n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнялось условие (2.2):

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\Big| < \varepsilon \quad (\forall x \in E) \tag{2.2}$$

1 из **I**.2.2.

Доказательство $\Box \triangleleft$ *1.*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \implies \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = s_{n+p}(x) - s_n(x)$$

Равномерная сходимость функционального ряда (1.2) равносильна равномерной сходимости функциональной *последовательности частичных сумм* этого ряда $s_n(x)$ на E.
Что равносильно, согласно *критерию Коши* (**I**.2.2) равномерной сходимости функциональных *последовательностей*, тому, что $\forall\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$, зависящее только от ε и не зависящее от x, такое что $\forall\, p \in \mathbb{N}$ и $\forall n > N\ n \in \mathbb{N} \implies$

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in E)\ .$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку совпадает с неравенством 2.2 из условия доказываемой теоремы. *Ч.т.д.* 1 $\triangleright\Box$.

Следствие 2 из **I**.2.2.
(Необходимое условие сходимости функционального ряда).

Для того чтобы функциональный ряд (1.2) равномерно сходился на E необходимо, но отнюдь не достаточно, чтобы его общий член равномерно сходился к 0.

$$\text{Равномерная сходимость (1.2)} \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \implies u_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \quad (\forall x \in E) \qquad (***)$$

2 из **I**.2.2.

Доказательство □ ◁ *2.*
Равномерная сходимость функционального ряда (1.2) равносильна тому (согласно критерию Коши 1), что $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое что $\forall n > N,\ n \in \mathbb{N}$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \quad (\forall x \in E)\,.$$

Поскольку неравенство выполнено при всех $p \in \mathbb{N}$, оно выполнено в частности и при $p = 1$. Это значит, что

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что из $n > N \Rightarrow$

$$\sum_{k=n+1}^{n+1} |u_k(x)| \,=\, u_{n+1}(x) < \varepsilon \quad (\forall x \in E)\,.$$

Последние условия и неравенство по определению **I**.1.7 в точности означают, что ф.п. $u_{n+1}(x)$ равномерно сходится к нулю:

$$u_{n+1}(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0\ (x \in E) \quad \Leftrightarrow \quad u_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \quad (\forall x \in E)\,.$$

Ч.т.д. 2 ▷ □.

Замечание □ *2.4.* Условие (***) отнюдь не является достаточным .

$$\text{Другими словами, из} \quad u_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \quad \not\Rightarrow \quad \text{равномерная сходимость } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Исследуем характер сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n + x^2}$ на множестве $E = (-\infty; +\infty)$.

1) Убедимся в том, что *утверждение* следствия 2 выполнено — общий член ряда равномерно на $(-\infty, +\infty)$ сходится к нулю:

$$u_n(x) = \frac{1}{n + x^2} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \quad (\forall x \in E)\,.$$

Эту равномерную сходимость к нулю докажем по теореме **I**.2.1 — критерию равномерной сходимости в терминах супремума. Её условия выполнены:

$$\mathbf{1})\ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, d_n = \sup_{x\in E} |u_n(x) - 0| \,=\, \sup_{x\in E} \frac{1}{n + x^2} = \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \mathbf{2})\ \ d_n \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

2) Но *посылка* следствия 2 не выполнена. Несмотря на то, что общий член ряда $\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n + x^2}$ *расходится* при всяком фиксированном $x \in (-\infty, +\infty)$ на основании, например, интегрального признака. Таким образом, здесь отсутствует даже обыкновенная, поточечная сходимость, т.е. *предельная функция* для последовательности частичных сумм *не существует.* Значит, равномерной сходимости нет — ря́ду просто не́ к чему сходи́ться.

Доказать отсутствие равномерной сходимости можно, не прибегая к понятию предельной функции, а пользуясь лишь критерием Коши — следствием 2 из теоремы **I**.2.2.

Убедимся в этом. Сформулируем для удобства критерий Коши *неравномерной* сходимости функционального ряда. Для этого построим формальное логическое отрицание необходимых и достаточных условий в критерии Коши равномерной сходимости функциональных рядов, заменяя в этих условиях кванторы на противоположные. Получим:

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится **неравномерно** на множестве E, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall N(\varepsilon),\ N \in \mathbb{N}$ найдутся такие натуральные $n > N(\varepsilon)$ и p $\ (\exists\, n > N(\varepsilon), n \in \mathbb{N}$ и $\exists\, p \in \mathbb{N}$), и найдётся такой $x \in E$ $(\exists x \in E)$, что выполнено неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)\right| \geqslant \varepsilon$$

Возьмём $\varepsilon = \ln 2 > 0$. Теперь, каким бы мы ни выбрали $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, всегда найдутся $n > N(\varepsilon)$ и $p = 3n$, а также $x = 0 \in (-\infty, +\infty)$, такие что

$$\left.\left|\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k+x^2}\right|\right|_{x=0} = \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \ln 3n + C_{\text{Эйлера}} + \gamma_{2n} - \ln n - C_{\text{Эйлера}} - \gamma_n =$$

$$= \ln 3 + (\gamma_{3n} - \gamma_n) > \ln 2 = \varepsilon$$

(Выбирая n достаточно большим, а не просто бо́льшим $N(\varepsilon)$, можно сделать разность $\gamma_{3n} - \gamma_n$ сколь угодно малой.) Последнее неравенство доказывает отсутствие равномерной сходимости без обращения к предельной функции. *2.4.* □

Следствие 3 из **I**.2.2.

При умножении равномерно сходящегося ряда на ограниченную функцию равномерная сходимость сохраняется.

3 из **I**.2.2.

Доказательство □ ◁ *3.*

Дано: функциональный ряд (1.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad\qquad (\#\#\#)$$

равномерно сходится на множестве E и $|\varphi(x)| < M\ \forall x \in E$

Доказать: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot u_n(x)$ равномерно сходится на E.

Из равномерной сходимости (###) следует, что $\forall \varepsilon > 0$ по $\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ можно найти такое $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M} \implies \sum_{k=n+1}^{n+p} |\varphi(x) \cdot u_k(x)| = \underbrace{|\varphi(x)|}_{\leq M} \cdot \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)}_{<\frac{\varepsilon}{M}} < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

То есть, согласно следствию 1, имеет место равномерная сходимость (1.2) . *Ч.т.д. 3* $\triangleright\square$.

Теорема $\triangleleft$ *2.3:*

Признак Вейерштрасса.

Рассмотрим функциональный ряд (1.2).Если $\exists$ *последовательность* $a_n \geqslant 0$ *такая, что:*

1) $|u_n(x)| \leqslant a_n \quad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится,*

то функциональный ряд (1.2) сходится равномерно *на множестве* E . *2.3.* $\triangleright$

Замечание $\square$ *2.5.* В этом случае говорят, что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорирует на функциональный ряд (1.2), или, что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является мажорантой функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. *2.5.* $\square$

Доказательство $\square\triangleleft$ ***I**.2.3.*

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Longrightarrow$ выполнен критерий Коши:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n > N \quad \text{и} \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

$$\text{Рассмотрим} \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon \Rightarrow$$

согласно следствию 1 из теоремы **I**.2.2 вытекает равномерная сходимость функционального ряда (1.2). *Ч.т.д.* **I**.2.3 $\triangleright\square$.

Замечание $\square$ *2.6.* Условие признака Вайерштрасса отнюдь не является необходимым, то есть существуют равномерно сходящиеся функциональные ряды, которые не могут быть промажорированы сходящимся числовым рядом. *2.6.* $\square$

Пример ◂2.4. Исследуем сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ на множестве $E = (-\infty;+\infty)$

Во-первых, для всякого $x \in E$ этот ряд сходится по признаку Лейбница, т,е. при всех x определена сумма ряда.

Далее. Этот ряд равномерно сходится на множестве E.

Действительно, так как это ряд Лейбницевского типа, то имеет место оценка:

$$|R_n(x)| = |s_n(x) - s(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in E} |s_n(x) - s(x)| \leqslant \sup_{x\in E} \frac{1}{n+1+x^2} = \frac{1}{n+1}$$

$\Longrightarrow$ выполнены условия теоремы **I**.2.1

1) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, d_n = \sup\limits_{x \in E} |s_n(x) - s(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$,

2) $d_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$

Следовательно, последовательность частичных сумм $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s(x)$. Что и означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ сходится равномерно.

С другой стороны, признак Вайерштрасса неприменим. В данном случае наш ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$ может быть по модулю оценен сверху лишь гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, который, как известно, расходится. **2.4.** ▶

Пример ◀2.5. Исследуем на равномерную сходимость функциональный ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ на множестве $E = (-\infty; +\infty)$.

Этот ряд равномерно сходится на E по признаку Вайерштрасса.

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha} = a_n$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ – сходится при $\alpha > 1$. $\Longrightarrow$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ — мажорирующий для нашего функционального ряда. $\Longrightarrow$ равномерная сходимость. **2.5.** ▶

Замечание □ *2.7.* Если $0 < \alpha \leq 1$ признак Вайерштрасса неприменим. Для исследования равномерной сходимости нужны более тонкие признаки.

Напоминание:

Неравенство Абеля: Если

1) $a_n \geqslant a_{n+1} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) и $|B_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, где $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$,

то $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\, b_k\right| < 2M a_{n+1}$

2.7. □

Теорема ◁ *2.4:* Признак Дирихле равномерно сходящегося функционального ряда.

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{2.3}$$

Пусть

1) $a_n(x) \geqslant a_{n+1}(x) > 0 \qquad \forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2) $a_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0.$

3) $|B_n(x)| < M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E$, *где* $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$.

Тогда функциональный ряд (2.3) сходится равномерно на множестве E 2.4. $\triangleright$

Доказательство $\square \triangleleft$ ***I**.2.3.* Пусть $\varepsilon > 0$ любое, тогда по $\dfrac{\varepsilon}{2M} > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое что из

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_{n+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (\forall x \in E)\,,$$

— сделать a_{n+1} сколь угодно малым можно в силу условия 2).
Рассмотрим $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\, b_k(x)|$. Применим к этой сумме неравенство Абеля. Для этого заметим, что, благодаря условиям *1).* и *3).* нашей теоремы, все предположения, в которых неравенство Абеля применимо, выполнены.

Согласно неравенству Абеля имеем оценку:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqslant 2M\,|a_{n+1}(x)| < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\,.$$

Согласно критерию Коши равномерной сходимости функциональных рядов (следствие 1 из т.**I**.2.2), последнее неравенство как раз означает равномерную сходимость нашего функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$.
Ч.т.д. **I**.2.3 $\triangleright \square$.

Пример ◀2.6. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\sin(nx), \quad \text{на множестве} \quad E = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]\,, \tag{2.4}$$

где $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$ и $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Этот ряд сходится равномерно на множестве E по признаку Диришле — теорема **I**.2.4. Первые два пункта теоремы выполнены по условию задачи. Проверим 3 — ограниченность в совокупности частичных сумм $B_n(x)$.

$$|B_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(nx)\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin(\dfrac{x}{2})\right|} \leqslant \sqrt{2}$$

$$\text{Поскольку} \quad \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{3\pi}{4}\,, \quad \text{то} \quad 1 \geqslant \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|\Bigg|_{\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4} = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}\right|\Bigg|_{\pi/4 \leqslant x \leqslant 3\pi/4} \leqslant \sqrt{2}$$

2.6. ▶

§3. Свойства равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Теорема $\triangleleft$ *3.1:* О непрерывности суммы равномерно сходящихся функциональных рядов.

Рассмотрим: функциональный ряд (1.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.

Пусть

1) Данный функциональный ряд сходится равномерно на E*.*

$$S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x) \quad \textit{на } E\,, \quad \textit{где} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)\,,$$

2) Все функции $U_n(x)$*,* $n = 1, 2, \ldots$ *непрерывны в точке* $x_0 \in E$ *.*

Тогда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *непрерывна в точке* x_0*.* *3.1.* $\triangleright$

Замечание $\square$ *3.1.* пункте 2). предполагается, что точка x_0 принадлежит множеству E вместе с некоторой окрестностью. Если же речь идет об одной из полуокрестностей, то подразумевается односторонняя непрерывность $U_n(x)$ в условии и $S_n(x)$ в заключении. *3.1.* $\square$

Доказательство $\square\triangleleft$ ***I****.3.1.*

Необходимость.

Дано : Выполнены условия *1)* и *2)*.

Доказать : $S(x)$ непрерывна на E. Т.е. для всякой точки $x_0 \in E$ функция $S(x)$ непрерывна в точке x_0. На языке $\varepsilon - \delta$:

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое что $\forall\, x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0)$ выполнено неравенство

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon\,. \tag{3.1}$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и научимся по нему строить $\delta(\varepsilon, x_0)$, такое что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство (3.1).

Пусть $\varepsilon > 0$ - любое, тогда, в силу равномерной сходимости нашего функционального ряда, имеем: $\forall\, \dfrac{\varepsilon}{3} > 0 \quad \exists N = N\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right) \in \mathbb{N}$ такое, что из $n > N\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, $n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow$

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, x \in E\,, \tag{3.2}$$

Поскольку неравенство верно для всех $n > N\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, то оно верно и для $n = N + 1$ при всех $x \in E$:

$$|S_{N+1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall x \in E) \tag{3.3}$$

в том числе неравенство верно и для $x = x_0$.

$$|S_{N+1}(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.4}$$

Далее. Поскольку все члены ряда $U_n(x)$ суть непрерывные функции от x, то и сумма первых $N+1$ членов ряда $S_{N+1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{N+1} U_k(x)$ тоже есть непрерывная функция от x во всех точках $x \in E$, в том числе и в точке x_0.

Из непрерывности $S_{N+1}(x)$ в точке x_0 следует, что по $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ найдётся $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что из $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$ следует

$$|S_{N+1}(x) - S_{N+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.5}$$

Из (3.3), (3.4), (3.5) при $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \Big|S(x) - S(x_0)\Big| = \Big|\big[S(x) - S_{N+1}(x)\big] + \big[S_{N+1}(x) - S_{N+1}(x_0)\big] + \big[S_{N+1}(x_0) - S(x_0)\big]\Big| \leqslant \\ &\leqslant \Big|S(x) - S_{N+1}(x)\Big| + \Big|S_{N+1}(x) - S_{N+1}(x_0)\Big| + \Big|S_{N+1}(x_0) - S(x_0)\Big| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned} \tag{3.6}$$

Итак, мы доказали, что для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :$ из $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $S(x)$ непрерывна в точке x_0. *Ч.т.д.* **I**.3.1 ▷ □.

Замечание □ *3.2.* Условие равномерной сходимости функционального ряда (1.2) существенно. *3.2.* □

Пример ◀3.1. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$ на множестве $E = [0; 1]$. Исследуем его на равномерную сходимость.

Нижеследующее рассуждение является типичным.

Предположим что наш *функциональный ряд сходится равномерно* на E. Он составлен из непрерывных на E функций: $U_n(x) = x^n - x^{n+1} \in C_{[0;1]}$. Таким образом, *если* наше *предположение справедливо*, то оба условия теоремы **I**.3.1 выполнены. Следовательно, наш функциональный ряд сходится к *непрерывной* на E *функции* $S(x)$. Найдём её, как предел частичных сумм.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x^k - x^{k+1}) = x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots + x^n - x^{n+1} = x - x^{n+1}$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x^n - x^{n+1}) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \leqslant x < 1 \,, \\ 0, \text{ если } x = 1 \end{cases}$$

Видим, что предельная функция *разрывна* в точке $x_0 = 1$, что противоречит заключению теоремы **I**.3.1. Следовательно, условия, при которых теорема верна, не выполнены. Поскольку функции $x^n - x^{n+1}$ очевидно непрерывны, второе условие теоремы соблюдено, и значит невыполнено первое: наше *предположение* о *равномерной сходимости* ряда *неверно.* $\Longrightarrow$ Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n - x^{n+1}$ сходится неравномерно на $[0; 1]$. **3.1. ▶**

Следствие 1 из **I**.3.1. Если функциональный ряд (1.2), состоящий из непрерывных функций сходится к функции разрывной, то сходимость неравномерная. 1 из **I**.3.1.

Замечание □ *3.3.* Тем не менее равномерная сходимость функционального ряда (1.2) отнюдь не является необходимой для непрерывности суммы. *3.3.* □

Пример ◀3.2.

$$\text{Из} \quad \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = S(x) \quad \text{непрерывна на } E \;\not\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} U_k(x) = S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x) \quad \forall\, x \in E$$

Рассмотрим функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{x}{n}\right) - \sin\left(\frac{x}{n+1}\right)\right]$ на множестве $E = (-\infty; +\infty)$.

Заметим что второе условие теоремы **I**.3.1 выполнено

$$U_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) - \sin\left(\frac{x}{n+1}\right) \quad \in C_{(-\infty;+\infty)}$$

Найдём сумму ряда как предел последовательности его частичных сумм.

$$S_n(x) = \sin(x) - \sin\left(\frac{x}{n+1}\right)$$
$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin(x) - \sin\left(\frac{x}{n+1}\right) = \sin x$$

Заключение теоремы тоже выполнено — сумма ряда $= \sin x$ *непрерывна.*

Однако функциональный ряд сходится *неравномерно* на $(-\infty; +\infty)$ согласно критерию **I**.2.1.

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, d_n = \sup\limits_{x\in E} |S_n(x) - S(x)| = \sup\limits_{x\in(-\infty;+\infty)} \left|\sin\left(\frac{x}{n+1}\right)\right| = 1$

2) но $\lim\limits_{n\to\infty} d_n \neq 0$.

3.2. ▶

Упражнение ◁ □ 3.1. Сформулировать и доказать теорему, аналогичную теореме (**I**.3.1), для функциональных последовательностей. *3.1. □ ▷*

Теорема ◁ 3.2: Теорема о почленном интегрировании функциональных рядов.

Рассмотрим функциональный ряд: (1.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.

Пусть:

1) $U_n(x) \in C_{[a;b]}$

2) Функциональный ряд (1.2) сходится равномерно на $[a; b]$

Тогда:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n(x)\, dx \tag{3.7}$$

т.е. функциональный ряд (1.2) допускает почленное интегрирование на $[a; b]$. *3.2. ▷*

Доказательство $\square \lhd$ ***I**.3.2.*

Пусть $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}$, тогда $S(x) \in C_{[a;b]}$ — непрерывна на $[a;b]$ согласно теореме (**I**.3.1). $\Longrightarrow$ $S(x)$ интегрируема на $[a;b]$

Пусть для любого $\varepsilon > 0$, по $\dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$ $\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что из $n > N$ следует

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \ (\forall x \in [a;b])$$

(т.к. по условию $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x)$ на $[a;b]$.)

$$\left| \int\limits_a^b S(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b U_k(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_a^b S(x)\,dx - \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{n} U_k(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_a^b \big[S(x) - S_n(x)\big]\,dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |S(x) - S_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Мы доказали, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что из $n > N$ следует неравенство

$$\left| \int\limits_a^b S(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b U_k(x)\,dx \right| < \varepsilon\,.$$

Это значит, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_a^b U_k(x)\,dx \right) = \int\limits_a^b S(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad \text{сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b U_n(x)\,dx = \int\limits_a^b S(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b U_n(x)\,dx\,.$$

Ч.т.д. **I**.3.2 $\rhd \square$.

Упражнение $\lhd \square$ *3.2.* формулировать и доказать аналогичную теорему для функциональных последовательностей. *3.2.* $\square \rhd$

Замечание $\square$ *3.4.* Условие равномерной сходимости функционального ряда (1.2) в теореме (**I**.3.2) существенно. *3.4.* $\square$

Пример ◀3.3. Пример функционального ряда, не допускающего почленного интегрирования.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big[\ nx \cdot e^{-nx^2} - (n-1)x \cdot e^{-(n-1)x^2}\ \Big]$ на множестве $E = [0;1]$.

Найдём сумму ряда:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\ kx \cdot e^{-kx^2} - (k-1)x \cdot e^{-(k-1)x^2}\ \right] = nx \cdot e^{-nx^2}\,.$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} nx \cdot e^{-kx^2} = 0 \quad (\forall x \in [0;1])$$

Из $S(x) = 0$ следует $\int\limits_0^1 S(x)\,dx = 0$.

$$\text{С другой стороны} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1 U_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1 \Big[\, nx\cdot e^{-nx^2} - (n-1)x\cdot e^{-(n-1)x^2}\,\Big]\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}\cdot\left[\, e^{-nx^2}\Bigg|_0^1 - e^{-(n-1)x^2}\Bigg|_0^1\,\right] = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2}\cdot\Big[\, e^{-n} - 1 - e^{-(n-1)} + 1\,\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{n-1}} - \frac{1}{e^n}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{e^{n-1}} - \frac{1}{e^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^3} + \ldots + \frac{1}{e^{n-1}} - \frac{1}{e^n}\right] = \frac{1}{2}\,.$$

$$\text{Итак} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1 U_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq \int\limits_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\right)dx = 0.$$

3.3. ▶

Замечание □ *3.5.* Тем не менее условие равномерной сходимости функционального ряда (1.2) отнюдь не является необходимым для его почленной интегрируемости. *3.5.* □

Пример ◀3.4.

Функциональный ряд допускает почленное интегрирование: $\int\limits_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b U_n(x)\,dx$	$\not\Rightarrow$	Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится равномерно.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\, nx\cdot e^{-n^2x^2} - (n-1)x\cdot e^{-(n-1)^2x^2}\,\Big]$ на отрезке $E = [0;1]$.

Найдём его сумму:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\Big[\, kx\cdot e^{-k^2x^2} - (k-1)x\cdot e^{-(k-1)^2x^2}\,\Big] = nx\cdot e^{-nx^2}$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} nx\cdot e^{-n^2x^2} = 0 \quad (\forall x\in[0;1])$$

$$S(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \int\limits_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\, nx\cdot e^{-n^2x^2} - (n-1)x\cdot e^{-(n-1)^2x^2}\,\Big]\right)dx = \boxed{\int\limits_0^1 S(x)\,dx = 0}$$

Интеграл от суммы ряда равен нулю. С другой стороны, ряд, составленный из суммы интегралов, тоже равен нулю. Убедимся в этом.

$$\tilde{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \Big[nx \cdot e^{-n^2x^2} - (n-1)x \cdot e^{-(n-1)^2x^2} \Big]\, dx =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \Big|_0^1}_{\text{при } n=1} + 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\frac{1}{2n} \cdot e^{-n^2x^2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2(n-1)} \cdot e^{-(n-1)^2x^2} \Big|_0^1 \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-1} + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\frac{1}{2n} \cdot e^{-n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n-1)} \cdot e^{-(n-1)^2} + \frac{1}{2(n-1)} \right]$$

$$\tilde{S}_n = \frac{1}{n} - \frac{e^{-n^2}}{n}\,, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \boxed{\tilde{S} = 0\,.}$$

Таким образом, данный ряд допускает почленное интегрирование. Тем не менее равномерная сходимость отсутствует. Покажем это. Покажем, что функциональная последовательность частичных сумм ряда $S_n(x)$ не сходится равномерно на $[0,1]$. Используем критерий равномерной сходимости в терминах супремума — теорему **I**.2.1.

1) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, d_n = \sup\limits_{x\in[0;1]} \big|S_n(x) - S(x)\big| = \sup\limits_{x\in[0;1]} nx \cdot e^{-n^2x^2}$

Найдём этот супремум

$$\left(nx \cdot e^{-n^2x^2}\right)' = n \cdot e^{-n^2x^2} - 2n^3x^2 \cdot e^{-n^2x^2} = 0\,, \quad \Longrightarrow x_n^{max} = \frac{1}{n\sqrt{2}}$$

$$\sup_{x\in[0;1]} \big|S_n(x) - S(x)\big| = S_n\left(x_n^{max}\right) = nx \cdot e^{-n^2x^2} \Big|_{\frac{1}{n\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} = d_n$$

2) Однако $d_n \not\to 0$ при $n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad S_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} S(x) = 0$ на $[0;1]$

Итак, наш ряд не сходится равномерно. Но почленное интегрирование даёт верный результат. Это и означает, что равномерная сходимость *не является необходимым условием* допустимости почленного интегрирования. **3.4. ▶**

Замечание □ 3.6. Условие непрерывности $U_n(x)$ в теореме (**I**.3.2) может быть существенно ослаблено. *3.6. □*

Теорема ◁ 3.3: Пусть

1) $U_n(x)$ определена и интегрируема на $[a;b]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) Функциональный ряд (1.2) сходится равномерно на $[a;b]$

Тогда

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \quad \textit{интегрируема на} \quad [a;b] \quad \textit{и} \quad \int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n(x)\,dx$$

3.3. $\triangleright$

Замечание $\square$ *3.7.* Пусть выполнены условия теоремы (**I**.3.2).

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^x U_n(t)\,dt \qquad (\forall x\in[a;b])$$

Из доказательства теоремы (**I**.3.2) следует, что этот функциональный ряд сходится равномерно на $[a;b]$ к $\int\limits_a^x S(t)\,dt$, и, в частности, имеет место равенство

$$\int\limits_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\right)\,dt=\int\limits_a^x S(t)\,dt.$$

3.7. $\square$

Теорема $\triangleleft$ *3.4:* О почленном дифференцировании функционального ряда (1.2).

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)=U_1(x)+U_2(x)+\dots \tag{3.8}$$

Пусть

1) Функциональный ряд (3.8) сходится для $\forall x\in[a;b]$.

2) $U'_n(x)\in C_{[a;b]} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3) Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U'_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a;b]$

Тогда $G(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)\in C^1_{[a;b]}$ *и имеет место формула*

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}U'_n(x)\ ,$$

т.е. ряд (3.8) можно почленно дифференцировать. *3.4.* $\triangleright$

Доказательство $\square\triangleleft$ ***I**.3.4.* Обозначим

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n'(x)\ ,$$

$T(x)$ непрерывна на $[a;b]$ согласно теореме (**I**.3.1), посольку, по условию *2)*, ряд составлен из непрывных функций и, по условию*3)*, ряд сходится равномерно на $[a,b]$.

Непрерывную функцию можно интегрировать, и этот интеграл, по теореме Ньютона-Лейбница, будет дифференцируем, как функция верхнего предела. Ряд в правой части формулы можно интегрировать почленно от a до x, согласно замечанию **3.7**.

$$\int\limits_a^x T(s)\,ds = \int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{'}(s)\right) ds = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_a^x U^{'}{}_n(s)\,ds\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\, U_n(x) - U_n(a)\,\right] = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} U_n(a)}_{\text{эти ряды сходятся по условию } 3)} = S(x) - S(a)$$

$$\Longrightarrow \quad S(x) = S(a) + \int\limits_a^x T(s)ds \in C_{[a;b]} \qquad \text{Отсюда} \quad S^{'}(x) = T(x)$$

т.е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\right)^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} U^{'}{}_n(x) \qquad \forall x \in [a;b]$$

Ч.т.д. **I**.3.4 ▷ □.

Упражнение ◁ □ *3.3.* Сформулировать и доказать теорему, аналогичную теореме (**I**.3.4) для функциональных последовательностей. *3.3.* □ ▷

Замечание □ *3.8.* Условие равномерной сходимости ряда существенно. *3.8.* □

Пример ◀3.5.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; на множестве $E = [0;1]$

Найдём его сумму:

$$S_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = x$$

$$S^{'}(x) = 1 \quad \forall x \in [0;1]\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} U^{'}{}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1} - x^n)$$

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U^{'}{}_k(x) = 1 - x^n$$

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U^{'}{}_n(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty}(1 - x^n) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

$$\text{Итак,} \quad S^{'}(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right)^{'} \neq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)^{'} = T(x)$$

Это объясняется тем, что не выполнено достаточное условие *3)* — ряд сходится неравномерно на $[0; 1]$.
3.5. ►

Замечание □ *3.9.* Можно показать, что условие равномерной сходимости ряда, состоящего из производных, отнюдь не является необходимым для почленной дифференцируемости этого ряда. *3.9.* □

ГЛАВА **II**

Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots \tag{0.1}$$

называется степенным рядом. Числа c_n называются коэффициентами степенного ряда.
Очевидно, что любой степенной ряд сходится по крайней мере в одной точке, а именно в точке x_0.
В дальнейшем будем рассматривать степенные ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

§1. Радиус сходимости степенного ряда.

§1.a. Понятие радиуса сходимости.

Без ограничения общности можно рассматривать степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,. \tag{1.1}$$

Действительно, всякий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (\tilde{x} - \tilde{x_0})^n$ заменой $x = \tilde{x} - \tilde{x_0}$ (переносом начала координат в точку $\tilde{x_0}$) сводится к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Теорема $\lhd$ *1.1:* Первая теорема Абеля.
Если степенной ряд 1.1 *сходится в точке* $x = \overline{x}$, $x \neq 0$,
то он сходится, и притом абсолютно, $\forall x : \ |x| < |\overline{x}|$.

1.1. $\rhd$

Доказательство $\Box \lhd$ *1.1.*

По условию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \, \overline{x}^{\,n}$ сходится. Значит, общий член ряда стремится к нулю: $c_n \overline{x}^{\,n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Т.е. последовательность $c_n \overline{x}^{\,n}$ бесконечно-малая, а значит ограниченная: $|c_n \, \overline{x}^{\,n}| \leqslant M \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

Пусть $|x| < |\overline{x}|$. Докажем по признаку сравнения, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n\ x^n|$ сходится. Для этого мажорируем этот ряд сходящимся числовым рядом.

$$|c_n\ x^n| = \left|c_n\ \overline{x}^{\,n} \cdot \frac{x^n}{\overline{x}^{\,n}}\right| = |c_n \overline{x}^{\,n}| \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^n$$

$$0 \leqslant |c_n\ x^n| \leqslant M \cdot q^n\,, \quad \text{где} \quad q = \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|\,, \quad 0 < q < 1;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n \quad \text{сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем} \quad 0 < q < 1\,.$$

$\Longrightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$. *Ч.т.д.* 1.1 $\triangleright\square$.

Следствие 1 из 1-ой т. Абеля.

Если степенной ряд (1.1) расходится при $x = \overline{\overline{x}}$, то он расходится $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $|x| > \left|\overline{\overline{x}}\right|$, .

1 из 1-ой т. Абеля.

Доказательство $\square \triangleleft$ *следствия из 1-ой т. Абеля.*

От противного:

Допустим, что $\exists x_0\ :\ \ |x_0| > \left|\overline{\overline{x}}\right|$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ сходится $\Leftrightarrow$ степенной ряд 1.1 сходится (абсолютно) $\forall x:\ |x| < |x_0|;\ \left|\overline{\overline{x}}\right| < |x_0| \Leftrightarrow$ сходится $\sum\limits_{n=o}^{\to\infty} c_n \overline{\overline{x}}^{\,n}$ (!) *Ч.т.д.* следствия из 1-ой т. Абеля $\triangleright\square$.

Определение $\triangleleft\triangleleft$ *1.1.* *Рассмотрим степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (1.1)\,.$$

1) *В случае, если степенной ряд* (1.1) *сходится только в точке* $x = 0$*, говорят, что радиус сходимости этого ряда* $R = 0$.

2) *Пусть степенной ряд* (1.1) *сходится в* $x = \hat{x} \neq 0$. *Рассмотрим множество*

$$E = \left\{ |\hat{x}| \ \Big|\ x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{x}^n \quad \textit{сходится} \right\}$$

Если множество E *неограниченно сверху, то полагают* $R = \infty$.
Если множество E *ограниченно сверху, то полагают* $R = \sup E$.

1.1. $\triangleright\triangleright$

Теорема $\triangleleft$ *1.2:* О радиусе сходимости степенного ряда.

Пусть $R > 0$ *— радиус сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (1.1)$$

Тогда:

а) Если $R = \infty$, то степенной ряд (1.1) сходится абсолютно $\forall x$

б) Если $0 < R < \infty$, то степенной ряд (1.1) расходится $\forall\ x :\ |x| > R$

1.2. $\triangleright$

Доказательство $\square \triangleleft$ ***II****.1.2.* а) Пусть x-любое, тогда $\exists x' :\ |x'| > |x| : \sum\limits_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ сходится (по определению $R = \infty$) Отсюда по первой теореме Абеля $\Leftrightarrow$ степенной ряд (1.1) абсолютно сходится $\forall x : |x| < |x'| \Leftrightarrow$ требуемое утверждение.
б) $0 < R < \infty$

1) Пусть $x :\ |x| < R$. Согласно определению радиуса сходимости это означает, что

$$\exists x' :\ \left|\frac{1}{x}\right| > |x|; \sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n$$

сходится (ссылка на второе свойство верхней грани) $\Leftrightarrow$ (по первой теореме Абеля) степенной ряд (1.1) абсолютно сходится $\forall x : |x| < |x'|$

2) Пусть $x : |x| > R$
От противного: допустим, что $\exists x_0 : |x_0) > R, \sum\limits_{n=o}^{\infty} c_n x^n$ сходится $\Leftrightarrow |x_0| \in E \Leftrightarrow |x_0| \leq R$ (согласно первому свойству верхней грани) $|x_0| \leq R < |x_0| \Leftrightarrow |x_0| < |x_0|$

Ч.т.д. **II**.1.2 $\triangleright \square$.

Определение $\triangleleft \triangleleft$ *1.2. Пусть $R >$ о радиус сходимости степенного ряда* (1.1)*. Тогда интервал* $(-R; R)$ *называется интервалом сходимости степенного ряда* (1.1)*.* *1.2.* $\triangleright \triangleright$

Замечание $\square$ *1.1.* Из основного определения $\Leftrightarrow$ любой степенной ряд имеет радиус сходимости и при этом существуют степенные ряды трёх и только трёх видов, а именно:

1) $R = 0$

2) $r = \infty$

3) $0 < R < \infty$

1.1. $\square$

Замечание $\square$ *1.2.* В случае, если $R > 0$, то интервал сходимости $(-R; R)$ необязательно совпадает с областью сходимости степенного ряда (1.1), но, в частности, может с ней и совпадать. *1.2.* $\square$

Замечание $\square$ *1.3.* Если $R = \infty$, то $(-\infty; +\infty)$ совпадает с областью сходимости степенного ряда (1.1). *1.3.* $\square$

Замечание $\square$ *1.4.* Если $0 < R < \infty$, то в $(..)x \pm R$ степенной ряд (1.1) может как сходиться, так ирасходиться. При этом в случае его сходимости в этих точках, сходимость может быть, как абсолютной, так и неабсолютной. *1.4.* □

Замечание □ *1.5.* Если $R > 0$ радиус сходимости степенного ряда $(*)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, то интервалом сходимости является интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ *1.5.* □

§1.б. Формулы для радиуса сходимости

Рассмотрим степенной ряд (1.1). Применим для его исследования на абсолютную сходимость признак Даламбера.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \tag{1.2}$$

$a_n = |c_n x^n|\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}|$
Рассмотрим 3 случая:

1)
$$\exists \lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = 0 \Rightarrow \exists q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0\ (\forall x)$$
$$q = 0 < 1 \Rightarrow 1.2$$
сходится $\forall x$ то есть 1.1 сходится абсолютно $\forall x \Rightarrow R = \infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \infty \Rightarrow R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|\ (= \infty)$

2) Пусть $x \neq 0\ \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \infty \Rightarrow$ (1.2) расходится($a_n \not\to 0$) $\Rightarrow$ (1.1) расходится $(\forall x \neq 0) \Rightarrow R = 0$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}} = 0 \Rightarrow R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

3) Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = k > 0 \implies \exists q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x|k\{$1.1 абсолютно сходится при$|x| < \frac{1}{k}$; 1.1 расходится при $|x| > \frac{1}{k}\} \Rightarrow R = \frac{1}{k}$
Но $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = k \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \frac{1}{k} \Rightarrow$ если$\exists \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}| > 0$, то $R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$
Из $r1\ r2\ r3 \Rightarrow$ следующая теорема.

Теорема ◁ *1.3:*
Формула Даламбера для радиуса сходимости степенного ряда.
Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$ *(конечный или бесконечный), то R-радиус сходимости равен этому пределу то есть* $R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$
Доказательством служат предшествующие рассуждения.
1.3. ▷

Теорема ◁ *1.4:*
Формула Коши для радиуса сходимости степенного ряда.
Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ *конечный или бесконечный, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ *Доказательством служат предшествующие рассуждения.*

1.4. ▷

Примеры ◀1.1.

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$ то есть $R = \infty$

2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \ R = 0$$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$
$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = 1 \ R = (-1;1)$
Рассмотрим поведение ряда на концах промежутка
а) $x = 1; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \{$сходится,$\alpha > 1$ расходится$\alpha \le 1\}$
б) $x = -1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1^n}{n^\alpha} \{$абсолютно сходится $\alpha > 1$ сходится(неабсолютно)$0 < \alpha \le 1$ расходится$\alpha \le 0$
Область сходимости $\{(-1;1),\ \alpha \le 0;\ [-1;1),\ 0 < \alpha \le 1;\ [-1;1], \alpha > 1\}$
Область абсолютной сходимости $(-1;1),\ \alpha \le 1;\ [-1;1],\ \alpha > 1$

1.1. ▶

Замечание □ *1.6.* Формулы для R, содержащиеся в **II**.1.3, **II**.1.4 устанавливаются в случае существования соответствующих пределов (конечных и бесконечных). Однако, указанные там пределы могут и не существовать. *1.6.* □

Пример ◀1.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2 + -1^n]^n x^n \quad \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{2 + -1^n}$$

Предел этой последовательности не существует. **1.2.** ▶

Однако R существует для любого степенного ряда $\Rightarrow$ не всегда R может быть найден по формуле Даламбера или Коши.
Существует универсальная формула.
Определение ◁ ◁ *1.3.* *Определение верхнего предела последовательности.*
Пусть $\{x_n\}$-последовательность.

1) *Если $\exists$ подпоследовательность $x_{n_k} : \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$, где a-либо число, либо символ $\pm\infty$, то a называется частичным пределом последовательности x_n.*

2) *Если x_n не ограничена сверху, то полагают её верхний предел $= \pm\infty$ (запись: $= \overline{\lim_{n\to\infty}} = +\infty$).*

3) *Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то её верхним пределом называется величина $= \overline{\lim_{n\to\infty}} = \sup\{a\}$, где $\{a\}$ — множество её конечных частичных пределов, при условии, что оно не пусто (пусто — когда $\lim\limits_{\text{частичный}} = -\infty$).*

4) *Если x_n такова, что её единственным частичным пределом является $-\infty$ (то-есть $x_n \to -\infty$) то $= overline \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*

1.3. $\triangleright\ \triangleright$

Теорема $\triangleleft$ *1.5:* *Формула Коши-Адамара.*
Пусть R-радиус сходимости степенного ряда 1.1. Тогда $\frac{1}{R} == \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (При этом предполагается, что если этот предел $= \infty$, то $R = 0$, а если предел $= 0$, то $R = \infty$. *1.5.* $\triangleright$

Пример ◀1.3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{[2 + -1^n]\}^n \cdot x^n$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = 2 + (-1)^n \frac{1}{R} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}\,.$$

1.3. ▶

§2. Свойства степенных рядов.

§2.a. Равномерная сходимость степенных рядов.

Теорема ◁ *2.1:* *О равномерной сходимости степенного ряда.*

Рассмотрим степенной ряд (1.1), пусть $R > 0$, пусть $r : 0 < r < R$.
Тогда ряд (1.1) сходится равномерно на $[-r; r]$.
2.1. ▷

Доказательство □ ◁ ***II**.2.1.* Согласно теореме о сходимости (А ЧТО ЭТО ЗА ТЕОРЕМА?) наш степенной ряд (1.1) в точке $x = r$ сходится абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |C_n| r^n$

$|C_n x^n| \leq |C_n| r^n = a_n$ $(\forall x \in [-r; r])$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |C_n| r^n$ сходится, а следовательно степенной ряд (1.1), сходится равномерно на $[-r; r]$ *Ч.т.д.* **II**.2.1 ▷ □.

Замечание □ *2.1.* Из доказательства теоремы следует, что степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости $R > 0$ сходится равномерно на любом промежутке $[a; b] \in (-R; R)$. При этом, однако, степенной ряд не обязательно сходится равномерно во всем интервале сходимости. *2.1.* □

Пример ◀2.1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ R = 1 \quad \text{сходится неравномерно в} \quad (-1; 1) \quad S(x) = \frac{1}{1-x}\ S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\sup_{-1 < x < 1} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{-1 < x < 1} \frac{|x|^n}{1-x} \nexists$$

следовательно ряд сходится не равномерно. **2.1.** ▶

Замечание □ *2.2.* Однако существуют степенный ряды, которые сходятся равномерно не только в интервале $(-R; R)$ но и на $[-R; R]$. *2.2.* □

Пример ◀2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};\ R = 1;\ \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} = a_n$ $(\forall x \in [-1; 1])$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно данный степенной ряд сходится равномерно. **2.2.** ▶

Замечание □ *2.3.* Дополнительное обобщение - если ряд (1.1) сходится абсолютно при $x = R$ $(x = -R)$, то он сходится равномерно на $[-R; R]$ *2.3.* □

Пример ◀2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_n| R^n$ сходится $|C_n x^n| \leq |C_n| R^n = a_n$ $(\forall x \in [-R; R])$ следовательно степенной ряд (1.1) сходится равномерно на $[-R; R]$ **2.3.** ▶

Замечание □ *2.4.* Оказывается, что имеет место более сильное утвержление, а именно теорема Абеля. (Я НЕ НАШЕЛ ЕЕ В ЛЕКЦИЯХ И НЕ СМОГ НА НЕЕ СОСЛАТЬСЯ...)

Пусть степенной ряд (1.1) имеет ненулевой радиус сходимости: $0 < R < \infty$. Пусть также степенной ряд (1.1) сходится в точке $x = R$ хотябы неабсолютно.
Тогда степенной ряд (1.1) равномерно сходится на $[0; R]$.
Аналогичное утверждение справедливо и для $x = -R$ *2.4.* □

Пример ◀2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n R^n$ сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (C_n R^n) * \left(\frac{x}{R}\right)^n$
ДМИТРИЙ МИХАЙЛОВИЧ, Я НЕ ПОНЯЛ, ЧТО ЗНАЧИТ ЭТО СОКРАЩЕНИЕ:
и исп. пр. р. сх. Абеля. **2.4. ▶**

Теорема ◁ 2.2: О непрерывности суммы степенного ряда. Рассмотрим степенной ряд (1.1). Пусть он имеет ненулевой радиус сходимости $R > 0$, тогда сумма ряда непрерывна в интервале $[-R; R]$.

Пусть $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, *пусть* $x_0 \in (-R; R)$.
Докажем, что $S(x)$ непрерывна (ИЛИ НЕПРЕРЫВЕН, СПРОСИТЕ У ИГОРЯ ВИТАЛЬЕВИЧА - ЕМУ БУДЕТ ПРИЯТНО) в точке x_0.

Доказательство.
Пусть $r > 0 :\ |x_0| < r < R$. Степенной ряд (1.1) сходится равномерно на $[-r; r]$
$U_n(x) = C_n x^n \in [-r; r]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ следовательно согласно теореме о непрерывности суммы (А КАКОЙ НОМЕР У ЭТОЙ ТЕОРЕМЫ) ряд сходится равномерно $S(x) \in C_[- r; r]$, $x_0 \in (-r; r)$, следовательно $S(x)$ непрерывна в точке $x_0 \implies S(x) \in C_{(-R;R)}$. *2.2.* ▷

Замечание □ 2.5. Пусть $0 < R < \infty$, тогда $S(x) \in C_{(-R;R)}$, но не является непреыивна в точке $x = +-R$, Я ЗАБЫЛ ЛЬВОВСКОГО И НЕ ЗНАЮ ЭТОГО СИМВОЛА однако она может быть односторонне непрерывна в точке $+ - R$. *2.5.* □

Пример ◀2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(-1; 1)$ точка x_0 является точкой бесконечного разрыва $S(x)$. **2.5. ▶**

Пример ◀2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \in C_{[-1;1]}$ этот ряд равномерно сходится на $[-1; 1]$ т.е. она (КТО ОНА?) в точке +-1 односторонне непрерывна **2.6. ▶**

Замечание □ 2.6. Пусть $0 < R < \infty$, если степенной ряд (1.1) сходится в точке $x = R$ является непрерывным слева, т.е.

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n$$

это следует из 2-ой теоремы Абеля, согласно которой степенной ряд (1.1) на $[0; R]$ сходится равномерно, следовательно $S(x) \in C_{[0;R]}$ *2.6.* □

§2.б. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Теорема $\triangleleft$ *2.3:* *О почленном интегрировании степенного ряда.*
Степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости $R > 0$ внутри интервала сходимости допускает почленное интегрирование при этом радиус сходимости полученного ряда равен радиусу сходимости степенного ряда. (При почленном интегрировании радиус сходимости не изменяется.)

Доказательство.
*Пусть для определенности $0 < x < R$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n t^n$, $t \in [0;x]$ равномерно сходится на $[0;x]$ согласно теореме (**II**.2.1) и, следовательно, допускает почленное интегрирование. $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ $\int\limits_0^x S(t)dt = \int\limits_0^x \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n dt\right) dt =$ Согласно теореме о почленном интегрировании (КАК МОЖНО СОСЛАТЬСЯ НА ТЕОРЕМУ, КОТОРУЮ ДОКАЗЫВАЕШЬ, ИЛИ Я ОШИБСЯ) $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\int\limits_0^x C_n t^n dt\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} x^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n x^n$, где $d_n = \frac{C_{n-1}}{n}$ Пусть R_1 - радиус сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n x^n$, тогда $\frac{1}{R_1} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|C_{n-1}|}{n}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_{n-1}|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|C_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\sqrt[n]{|C_n|}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{R} \implies R_1 = R$ 2.3. $\triangleright$*

Замечание $\square$ *2.7.* В случае, если наш степенной ряд сходится в точке $x = R$ (хотябы неабсолютно), то справедлива формула: $\int\limits_0^R S(x)dx = \int \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n+1} R^{n+1}$. Аналогичное замечание справедливо для $x = -R$. *2.7.* $\square$

Пример ◀2.7. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$ $x \in (-1;1)$ Согласно теореме (**II**.2.3) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$, т.е. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ $(\forall x \in (-1;1))$. Заметим, что степенной ряд сходится в точке $x = 1$, следовательно его сумма в точке $x = 1$ являестя непрерывной слева. Переходя к пределу при $x \to 1 - 0$ получим: $\ln(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \implies \ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$; $(\forall x \in (-1;1))$ **2.7. ▶**

Теорема $\triangleleft$ *2.4:* *О почленном дифференцировании степенного ряда.*
Степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости $R > 0$ внутри интервала сходимости допускает почленное дифференцирование, при этом радиус сходимости полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда.

Пусть (1) $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$; пусть $x \in (-R;R)$ - произвольная точка; пусть $r > 0 :\ |x| < r < R$.

Рассмотрим ряд (2), состоящий из производных исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, где $d_n = (n+1)C_{n+1}$
Пусть R_2 - радиус сходимости степенного ряда (2), тогда по формуле Коши $\frac{1}{R_2} = overline \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|d_n|} = overline \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|C_{n+1}|} = overline \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n + 1|} = overline \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|C_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{R} \implies R_2 = R$
Интервал сходимости $(-R;R)$ следовательно на $[-r;r]$ степенной ряд (2) сходится равномерно, т.о. на $[-r;r]$ выполнены все условия теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда, следовательно $S^I(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right)^I = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$; $(\forall x \in (-R;R))$ 2.4. $\triangleright$

Пример ◀2.8.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...;\ x \in (-1;1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ...;$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n;\ x \in (-1;1)$$

2.8. ▶

Замечание □ 2.8. Из теорем (**II**.2.3) и (**II**.2.4) вытекает, что радиус сходимости не меняется как при почленном интегрировании, так и при дифференцировании. *2.8. □*

Замечание □ 2.9. Т.к. ряд состоит из производных членов данного ряда (1.1) есть также ряд с данным радиусом сходимости, то он (ряд из производных) дополнительно может быть почленно дифференцирован, тогда из этого следует, что степенной ряд представляет возможность бесконечного дифференцирования в интервале сходимости. *2.9. □*

Замечание □ 2.10. При почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов часто удается найти суммы этих рядов. *2.10. □*

Пример ◀2.9. $\phi^I(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n};\ \phi(0) = 0;\ \phi^I(0) = 1$

$x\phi^I(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \implies x\phi^I I + \phi^I = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$

Функция $\phi(x)$ является решением задачи Коши $x\phi^I I + \phi^I = \frac{1}{1-x};\ \phi(0) = 0;\ \phi^I(0) = 1$

Пусть $\phi^I = z$, тогда $xz^I + z = \frac{1}{1+x}$ $x\frac{dz}{dx} = -z;\ \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \implies \ln\frac{z}{c} = -\ln x = \ln\frac{1}{x} \implies z = \frac{C}{x};\ z = \frac{C(x)}{x} \implies x\left[\frac{C^I(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}\right] + \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{1-x} \implies C^I(x) = \frac{1}{1-x} \implies C(x) = -\ln(1-x);\ z = \frac{-\ln(1-x)}{x} \implies$
$\phi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int\limits_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt;\ (\forall x \in (-1;1))$ **2.9. ▶**

§3. Разложение функций в степенной ряд.

§3.a. Ряд Тейлора и аналитические функции.

Определение ◁ ◁ 3.1. *Пусть $f(x) \in C^{\infty}(O_h(x_0))$. Тогда степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{3.1}$$

($o! = 1; f^{(0)} = f$) называется рядом Тейлора $f(x)$ в $(.)x_0$ *3.1. ▷ ▷*

Определение ◁ ◁ 3.2. *Функция $f(x)$, которая является суммой степенного ряда с$R \neq 0$,то есть имеет место*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \tag{3.2}$$

$|x-x_0| < R$, где $R > 0$-ряд сходится, называется аналитической функцией в $(.)x_0$ *3.2. ▷ ▷*

Теорема ◁ 3.1: О ряде Тейлора
Если $f(x)$ является аналитической в $(.)x_0$ (то есть имеет место представление 3.2) то необходимо $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$ то есть степенной ряд 3.2 является рядом Тейлора функции $f(x)$, иными словами, всякий степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.
Доказательство:
Из 3.2 $\Rightarrow f(x) \in c^{\infty}(O_R(x_0))$ причём степенной ряд 3.2 допускает бесконечное почленное дифференцирование
(2^0) $f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \cdots + c_n(x-x_0)^n + \ldots$
(2^1) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + \cdots + nc_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots$
(2^2) $f''(x) = 2 \cdot 1c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2} + \ldots$
...
(2^n) $f^{(n)} = n!c_n + (n+1)n \ldots 2c_{n+1}(x-x_0) + (n+2)(n+1) \ldots 3c_{n+2}(x-x_0)^2 + \ldots$
Подставим в эту систему равенств $x' = x_0$:
$c_0 = f(x_o)$
$c_1 = f'(x_o)$
$c_2 = \frac{f''(x_o)}{2!}$
...
$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
Итак, мы нашли все коэфффициенты. *3.1. ▷*

Замечание □ 3.1. Из доказанной теоремы следует, что аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности $(.)x_0$. Естественно возникает вопрос : а верно ли обратное утверждение?
Заметим, что если функция бесконечно дифференцируема, то она обладает рядом Тейлора. Однако, может оказаться, что ряд Тейлора этой функции сходится лишь в одной $(.)x = x_0$ (то есть $R = 0$), а это означает, что он не представляет нашу функцию. Более того, если R ряда Тейлора будет больше нуля, это

вовсе не означает ,что наша функция является аналитической. Иными словами, утверждение обратное **II**.3.1 неверно, то есть из бесконечного дифференцирования не следует её аналитичность. *3.1.* □

Пример ◀3.1. $f(x) = \{e^{\frac{-1}{x^?}}, x \neq 0\ ;\ 0, x = 0\}$
$f(x) \in C^{\infty}(-\infty; +\infty)$
$f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}\ f(0) = 0\} \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0, n = 0, 1, 2, \dots$
$S(x) = 0 \forall x$, но $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0\} \Rightarrow f(x)$ не является аналитической в $(.)x_0$ то есть не существует окрестности $(.)x_0$ в которой наша функция представлялась бы рядом Тейлора. **3.1. ▶**

Возникает вопрос: при каких условиях бесконечно дифференцируемая функция представляется рядом Тейлора, то есть является аналитической?
Ответ на этот вопрос получается из формулы Тейлора:
Пусть $f(x) \in C^{\infty}(O_h(x_0))$.. Тогда имеет место формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.3}$$

где R_n-остаточный член
Из этой формулы вытекает лемма:

Лемма ◁ ⊏ р 3.1: Пусть $f(x) \in C^{\infty}(O_h(x_0))$. Тогда для того чтобы $f(x)$ была аналитической в $(.)x_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \forall x \in O_h(x_0)$. *3.1 ⊐ ▷*

Теорема ◁ 3.2: Пусть

1) $f(x) \in C^{\infty}(O_h(x_0))$.
2) $\exists M > 0 :\ |f^{(n)}(x)| \leq M\ (\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in O_h(x_0))$

Тогда $f(x)$ является аналитической функцией в $(.)x_0$, то есть является суммой своего ряда Тейлора.
Доказательство:
Рассмотрим остаточный член в форме Лагранжа:
$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}$, *где* $0 < \Theta < 1.\{\forall x \in O_h(x) \Rightarrow x_0 + \Theta(x - x_0) \in O_h(x)\} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!} = a_n\ (\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in O_h(x_0))$
$0 \leq |R_n(x)| \leq a_n$
Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{h}{n+2} = 0 < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* $\Rightarrow a_n \to 0\ (n \to \infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \forall x \in O_h(x_0) \Rightarrow f(x)$ *является аналитической в* $(.)x_0$. *3.2. ▷*

§3.б. Простейшие разложения.

1) $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n;\ -1 < x < 1.$
2) $f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n;\ -1 < x < 1.$

3) $f(x) = e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $-\infty < x < +\infty$

4) $f(x) = \sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$; $-\infty < x < +\infty$

5) $f(x) = \cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$; $-\infty < x < +\infty$
Разложения 3), 4), 5) получаются с помощью **II**.3.2.

6) $f(x) = \ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n - 1 < x < 1.$
$f'(x) = \frac{1}{1+x}$-не ограничена, следовательно **II**.3.2 формально не применима, но разложение было получено во втором параграфе другим способом- почленным интегрированием.

7) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$-ограничена, следовательно формально можно по **II**.3.2 но мы поступим иначе: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2}, -1 < x < 1 \Rightarrow$ (по теореме о почленном интегрировании) $\operatorname{arctg}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}$; $-1 < x < 1$ Однако этот ряд в $(..) \pm 1$ сходится по признаку Лейбница $\Rightarrow$ согласно (??) это равенство можно установить уже на отрезке $[-1; 1]$
При $x = 1$ получаем: $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Упражнение $\triangleleft \square$ *3.1.* айти разложение в степенной ряд в окрестности (.)0 функции arctan
3.1. $\square \triangleright$

§3.в. Биномиальный ряд.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \tag{3.4}$$

(где $\alpha \neq 0, \alpha \neq n n \in \mathbb{N}$ так как ряд исчезает при $\alpha = 0 \alpha = n$
Этот ряд называется биномиальным.Найдём R этого ряда.
$R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{n+1}{\alpha-n}| = 1$ то есть ряд 3.4 сходится абсолютно при $-1 < x < 1$
Обозначим $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$\varphi'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} x^2 + \dots \Rightarrow (1+x)\varphi'(x) = \alpha[1 + x + (\alpha-1)(1+x) + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} x^2 (1+x) + \dots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}(1+x) + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!} x^n (1+x) + \dots]$
Коэффициент при x_n в этой формуле есть $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}(1 + \frac{\alpha-n}{n}) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \Rightarrow (1+x)\varphi'(x) = \alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \alpha\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x)$ является решением задачи Коши: $\{(1+x)\varphi'(x) = \alpha\varphi\varphi(0) = 1\}$

$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{\alpha}{1+x} \Rightarrow \ln\varphi = \alpha\ln(1+x) = \ln{(1+x)}^{\alpha} \Rightarrow \varphi(x) = C{(1+x)}^{\alpha} \Rightarrow \varphi(x) = {(1+x)}^{\alpha}$.
Тем самым установлено равенство

$$(1+x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad -1<x<1 \tag{3.5}$$

Осталось рассмотреть поведение биномиального ряда на концах интервала сходимости. Используем признак Раабе для исследования правой части 3.5 на абсолютную сходимость. $r = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha} = 1+\alpha$
$(\alpha>0)$ $r>1 \Rightarrow$ сходимость.
$(\alpha<0)$ $r<1 \Rightarrow$ расходимость.
Итак

1) При $\alpha>0$ биномиальный ряд 3.4 сходится абсолютно в $(.)x=\pm1$

2) При $\alpha<0(x=-1)$-ряд 3.4 расходится, так как по второй теореме Абеля сумма ряда 3.4 должна быть непрерывна справа в противном случае, что невозможно, ибо ${(1+x)}^{\alpha}$ при $\alpha<0$ в $(.)x=-1$ имеет точку разрыва второго рода (бесконечный разрыв).

3) Рассмотрим $x=1,\ \alpha\le-1 \Rightarrow$ расходимость. $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n-\alpha}{n+1} \ge \frac{n+1}{n+1}$
$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \ge 1 \Rightarrow |a_n| \not\to 0$.

4) $x=1,\ -1<\alpha<0$- рассмотреть поведение биномиального ряда.

§3.г. Некоторые дополнительные разложения.

1) $f(x)=\mathrm{sh}(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!})=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(-\infty;+\infty)$.

2) $f(x)=\mathrm{ch}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-\infty;+\infty)$.

3) $f(x)=\arcsin(x)$ $f'(x)={(1-x^2)}^{-\frac{1}{2}}$-не ограничена в $(-1;1) \Rightarrow$ **II**.3.2 не применима.
${(1-x^2)}^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}x^4+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}x^6+\dots = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^nn!}x^{2n}$
Интегрируя почленно получаем:
$\arcsin(x) = x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{2^nn!(2n+1)} = x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{2n!!(2n+1)}$
Степенной ряд, стоящий в правой части сходится абсолютно в $(..)\pm1$
$a_n = \frac{(2n-1)!!}{2^nn!(2n+1)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$ (по формуле Стирлинга) $\frac{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{2^{2n}2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}(2n+1)} \sim \frac{k}{n^{\frac{3}{2}}}; \alpha=\frac{3}{2}>1$ -ряд Дирихле, так как $\alpha=\frac{3}{2}>1 \Rightarrow$ ряд сходится. Это разложение справедливо на отрезке с учётом теоремы Абеля.
$\frac{\pi}{2} = 1+\sum\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^nn!(2n+1)}$

Упражнение ◁ □ *3.2.*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{arcsh}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\\
f'(x) &= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} =\\
&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\cdot x^4-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}x^6+\dots\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\ -1<x<1\Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$f(x)=\operatorname{arcsh}(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

Однако это разложение справедливо на отрезке $[-1;1]$, так как в концевых точках сходится абсолютно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ сходится ($a_n \sum\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^{\frac{3}{2}}}$)-ряд Дирищле. *3.2.* □ ▷

§3.д. Разложение в степенные ряды полных эллиптических интегралов.

$$\mathbf{K}(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \tag{3.6}$$

$$E(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt \tag{3.7}$$

$0<k<1$ Будем исходить из следующего разложения:
$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}t$
Этот ряд сходится равномерно по $t\in(-\infty;+\infty)$ так как он мажорируется сходящимся числовым рядом: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}$ $a_n\sim\frac{c}{\sqrt{n}}k^{2n},\ 0<k<1$ a_n- сходится быстрее геометрической прогрессии.

По теореме о почленном интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов, имеем $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}=$
$\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}tdt]=\{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}tdt=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\}=\frac{\pi}{2}[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2k^{2n}]$
$\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}x^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{3!}x^3-\dots=1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n-1)}x^n\Rightarrow$ Действуя как в предыдущем случае, получаем: $\frac{\pi}{2}\{1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]\frac{k^{2n}}{(2n-1)}\}$ $0<k<1$

Замечание □ *3.2.* При разложении функции в степенные ряды достаточно часто используется умножение рядов, основанное на теореме Коши.
3.2. □

Пример ◀3.2. $f(x) = \ln^2(1-x)$ разложить в степенной ряд в окрестности $(.)x_0 = 0$. С помощью формулы Тейлора не получится вывести формулу для общего члена (не говоря уже о том, что производная не ограничена).

$\ln^2(1-x) = (x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots)(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n+1}(1\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-2}+\dots+\frac{1}{n}\cdot 1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n-k+1)})x^{n+1} = \{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}\frac{1}{n-k+1}) = \frac{1}{n+1}[(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k})_{=H_n} + (\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n-k+1})_{=H_n}] = \frac{2H_n}{n+1}\} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2H_n}{n+1}x^{n+1}$ $(-1 \le x < 1)$

$f(x) = \ln^2(1+x) = \frac{2H_n}{n+1}x^{n+1},\ -1 \le x < 1$

$C_n = \frac{2H_n}{n+1} > 0;\ C_n \to 0\ (C_n \sim \frac{2\ln n}{n+1} \to 0);\ C_{n+1} < C_n$. **3.2. ▶**

Упражнение ◁ □ 3.3. $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ в окрестности $x_0 = 0$ *3.3.* □ ▷

ГЛАВА **III**

Ряды Фурье.

§1. Предварительные сведения о системах ортогональных функций на отрезке.

Определение $\lhd\lhd$ 1.1. *Функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ определены и интегрируемы на $[a;b]$ называются ортоганальными на этом отрезке ($\phi \perp \psi$), если $\int\limits_a^b \phi(x)\psi(x)dx = 0$* 1.1. $\rhd\rhd$

Замечание $\square$ *1.1.* В этом определении существенным является отрезок, о котором идет речь, ибо одна и таже пара функций на одном отрезке может быть ортогональной, а на другом - нет. *1.1.* $\square$

Пример ◀1.1. Рассмотрим пару функций $\phi(x) = \sin(2x)$; $\psi(x) = \cos(x)$

1) $[-\pi;\pi]$; $\phi \perp \psi$
$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\sin(3x)+\sin(x))dx = 0$

2)

$[0;\pi]$; $\phi \neg\perp \psi$

$$\int\limits_0^{\pi} \sin(2x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin(3x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin(x)dx =$$
$$= -\frac{1}{6}\cos(3x)|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\cos(x)|_0^{\pi} = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{3} > 0$$

1.1. ▶

Определение $\lhd\lhd$ 1.2. *Система функций $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$; ... (конечная или бесконечная), где функции определены и интегрируемы на отрезке $[a;b]$ называется ортогональной системой функций, если выполнены условия*

1)

$$\int\limits_a^b \phi_n(x)\psi_m(x)dx = 0;$$

при $m \neq n$;

2)

$$\int\limits_a^b \phi^2(x)dx > 0;\ \phi(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если}\ 0 \le x < 1\,, \\ 1, \textit{если}\ x = 1. \end{cases}$$

1.2. $\rhd \rhd$

Определение $\lhd \lhd$ *1.3.* *Бесконечная система фукций* $1,\ \cos(x),\ \sin(x),\ \cos(2x),\ \sin(2x),\ \ldots$ *называется тригонометрической системой функций.* *1.3.* $\rhd \rhd$

Лемма $\lhd \sqsubset$ *p 1.1:* *Тригонометричкская система функций является ортогональной на отрезке* $[-\pi, \pi]$
1.1 $\sqsupset \rhd$
Доказательство $\square \lhd$ ***III**.1.1.*

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \sin(x)dx = 0$

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cos(x)dx = 0$

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 * 1dx = 2\pi > 0$

4)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx == \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [\sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)]dx = 0$$

5)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} [-\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)] = \begin{cases} 0\,, \ \text{если}\ n \ne m \\ \pi\,, \ \text{если}\ n = m\,. \end{cases}$$

6)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)] = \begin{cases} 0, \ \text{если}\ n \ne m \\ \pi, \ \text{если}\ n = m\,. \end{cases}$$

Ч.т.д. **III**.1.1 $\rhd \square$.

Замечание $\square$ *1.2.* Как уже отмечалось ранее, если некоторая система функций является ортогональной на одном множестве, то это не означает, что она ортогональна на другом множестве. Т.е. ортогональность зависит от множества. Пример тому - тригонометрическая система функций. Она, будучи ортогональной на $[-\pi, \pi]$, НЕ является ортогональной на $[0; \pi]$.

Проверьте выполнение условий ортогональности и убедитесь. *1.2.* □

Пример ◀1.2. Но и для интервала $[0, \pi]$ есть ортогональные системы. Рассмотрим две подсистемы тригонометрической системы функций:
$A = \{1,\ \cos(x),\ \cos(2x),\ ...\}$
$B = \{\sin(x),\ \sin(2x),\ ...\}$
Каждая из этих подсистем является ортогональной на $[0; \pi]$
1.2. ▶

Определение ◁ ◁ 1.4.

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)\right);\ (A_n^2 + B_n^2) > 0$$

называется тригонометрическим полиномом n-ной степени. *1.4.* ▷ ▷

Определение ◁ ◁ 1.5. *Функциональный ряд* $\frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right);\ (A_n^2 + B_n^2) > 0$ *называется тригонометрическим рядом.* *1.5.* ▷ ▷

Замечание □ 1.3. Очевидно, что любой тригонометрический полином представляет собой 2π периодичную функцию *1.3.* □

Замечание □ 1.4. Возникает вопрос: можно ли утверждать, то любая 2π периодичная функция $f(x) \in C^{\infty}_{(-\infty;\infty)}$ может быть представлена в виде тригонометрического полинома.
Ответ отрицательный. Контрпример:
$f(x) = e^{\sin(x)} \in C^{\infty}_{(-\infty;\infty)}$ *1.4.* □

§2. Простейшие свойства рядов Фурье.

§2.a. Понятие ряда Фурье.

Теорема ◁ 2.1: *Если тригометрический ряд вида*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{2.1}$$

сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$*, то необходимо: его коэффициенты определяются по формулам*

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\\ a_n&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $f(x)$*-сумма ряда (2.1). 2.1. ▷*
Доказательство □ ◁ ***III****.2.1.* Из (2.1)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ \forall x\in[-\pi;\pi]$$

из равномерной сходимости ряда (2.1) следует, что он допускает на этом отрезке почленное интегрирование:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx\right]\right)}_{=0}=\pi a_0$$

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

Умножим обе части равенства (2.1) на $\cos kx$

$$f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx)$$

Ряд сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$ согласно лемме (**??**) (он получается домножением на ограниченную функцию), следовательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx\cos kx + b_n\sin nx\ coskx)dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_k\cos^2 kxdx = \frac{a_k}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2k)dx = a_k\pi \quad \Rightarrow$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

Умножим на $\sin kx$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$$

Ч.т.д. **III**.2.1 $\triangleright\ \square$.

Замечание $\square$ *2.1.* Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi;\pi]$. Тогда определены числа a_n и b_n, задаваемые формулой (2.2).

$$f(x) \sim_{\delta\alpha\beta\alpha\delta\epsilon} \quad \mathit{\Delta\ \Xi\Omega\Upsilon\Xi}\, \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{2.3}$$

2.1. $\square$

Определение $\triangleleft\ \triangleleft$ *2.1.* *Тригонометрический ряд вида (2.3) сопоставляемый функции, определённой и интегрируемой на $[-\pi;\pi]$, коэффициенты которого определены по формуле (2.2) называется рядом Фурье функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$, а его коэффициенты a_n и b_n*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx\ n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.4}$$

называются коэффициентами ряда Фурье функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$. *2.1.* $\triangleright\ \triangleright$

Замечание $\square$ *2.2.* Из основной теоремы и основного определения следует, что любой равномерно сходящийся на отрезке $[-\pi;\pi]$ тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы на этом отрезке. *2.2.* $\square$

Упражнение $\triangleleft\ \square$ *2.1.* Привести пример неравномерно сходящегося на $[-\pi;\pi]$ тригометрического ряда, который тоже является рядом Фурье своей суммы. *2.1.* $\square\ \triangleright$

§2.б. Ряды Фурье чётной и нечётной функции.

Лемма ◁ ⊏ р 2.1: *Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-a;a]$ $a>0$. Тогда*

1) *Если $f(x)$ нечётна, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

2) *Если $f(x)$ чётна, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$

(доказать.)
2.1 ⊐ ▷

Теорема ◁ 2.2:
О коэффициентах Фурье чётной и нечётной функции.
Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi;\pi]$.
Пусть a_n, b_n её коэффициенты Фурье.
Тогда

1) *Если $f(x)$ нечётна, то* $a_n = 0,\ n = 0,1,\dots\ b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx\ n = 1,2,\dots$

2) *Если $f(x)$ чётна, то* $b_n = 0,\ n = 1,2,\dots\ a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx\ n = 0,1,2,\dots$

2.2. ▷

*Доказательство □ ◁ **III**.2.2.*

1) Пусть $f(x)$ нечётна, тогда $f(x)\cos nx$-нечётна $f(x)\sin nx$-чётна. Тогда утверждение 1) следует непосредственно из леммы (**III**.2.1).

2) Пусть $f(x)$ чётна, тогда $f(x)\cos nx$-чётна $f(x)\sin nx$-нечётна. Тогда утверждение 2) следует непосредственно из леммы (**III**.2.1).

Ч.т.д. **III**.2.2 ▷ □.

Замечание □ 2.3. Если $f(x)$ определена и интегрируема на $[0;\pi]$, то можно построить её ряд Фурье на этом отрезке только по косинусам, если продолжить её на $[-pi;0]$ чётным образом. И только по синусам, если продолжить на $[-\pi;0]$ нечётным образом.
(Тут два рисунка) *2.3. □*

Пример ◀2.1. Предлагается $f(x) = x,\ 0 \le x \le \pi$ разложить на $[0;\pi]$ в ряд по косинусам.

$$b_n = 0;\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi xdx = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos nxdx = \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^\pi xd\sin nx = \\ =& \frac{2}{\pi n}\left[x\sin nx\,\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin nxdx\right] = \\ =& \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\,\Big|_0^\pi = \\ =& \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0,\ \text{если } n = 2k; \\ \dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2},\ \text{если } n = 2k-1\} \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, нашему ряду сопоставляется:
$x \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\ x \in [0;\pi]$. Из дальнейших теорем будет следовать, что имеет место равенство:
$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\ x \in [-\pi;\pi] \Rightarrow \arccos(\cos x)\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\ x \in (-\infty;+\infty)$
Положим $x = 0$:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} =& \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^2} = \\ =& \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \implies \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\implies \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.1. ▶

Упражнение ◁ □ *2.2.* Найти: $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^6}$. *2.2.* □ ▷

§2.в. Комплексная форма ряда Фурье.

Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi;\pi]$. Тогда ей можно сопоставить ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \ n = 0, 1, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \ n = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{2.6}$$

Перепишем ряд (2.5))

$$\frac{a_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right]$$

Обозначим

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \ c_{-n} = c'_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

Таким образом для функции определённой и интегрируемой на $[-\pi;\pi]$ можно поставить в соответствие её комплексный ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{2.7}$$

где его коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \ n \in \mathbb{Z} \tag{2.8}$$

Замечание □ *2.4.* Комплексная форма ряда Фурье представляет собой частный случай ряда Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ на $z = e^{ix}$ $-\pi \le x \le \pi$ *2.4.* □

§2.г. Ряд Фурье на произвольном отрезке.

Определение ◁ ◁ 2.2. *Система функций*

$$\{1;\ \cos\frac{\pi x}{l};\ \sin\frac{\pi x}{l};\cos\frac{2\pi x}{l};\sin\frac{2\pi x}{l};\ldots\cos\frac{n\pi x}{l};\ \sin\frac{n\pi x}{l};\ldots\}$$

где l-произвольное, $l>0$, называется обобщённой тригонометрической системой функций. *2.2. ▷ ▷*

Лемма ◁ ⊏ р 2.2: Обобщённая тригонометрическая система функций ортогональна на $[-l;l]$ (Доказать) 2.2 ⊐ ▷

Определение ◁ ◁ 2.3. *Функция вида*

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}A_k\cos\frac{k\pi x}{l}+B_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

где $A_n^2+B_n^2>0$ называется обобщённым тригонометрическим полиномом степени n. 2.3. ▷ ▷

Определение ◁ ◁ 2.4. *Функциональный ряд вида*

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\frac{\pi kx}{l}+B_k\sin\frac{\pi kx}{l}$$

называется обобщённым тригонометрическим рядом. При $l=\pi$ он превращается в обычный тригонометрический ряд. 2.4. ▷ ▷

Определение ◁ ◁ 2.5. *Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-l;l]$ $l>0$. Тогда этой функции можно сопоставить следующий тригонометрический ряд:*

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.9}$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,\ldots\\ b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,\ldots\end{cases} \tag{2.10}$$

Этот ряд называется рядом Фурье $f(x)$ на $[-l;l]$. Очевидно, что при $l=\pi$ он превращается в обычный ряд Фурье на $[-\pi;\pi]$. 2.5. ▷ ▷

Теорема ◁ 2.3: Всякий сходящийся тригонометрический ряд вида 2.9 является рядом Фурье своей суммы (доказать). 2.3. ▷

Упражнение ◁ □ 2.3.

1) Вывести коэффициенты Фурье функции, определённой и интегрируемой на $[-l; l]$ в случае, когда
   а) $f(x)$ — нечётная.
   б) $f(x)$ — чётная.

2) Вывести комплексную форму ряда Фурье на $[-l; l]$.

2.3. □ ▷

§3. Экстремальные свойства коэффициентов Фурье и неравенство Бесселя.

Определение $\lhd\lhd$ *3.1.* *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и интегрируемы на $[a;b]$, тогда*

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx}\quad,$$

называется среднеквадратичным отклонением функции $g(x)$ от функции $f(x)$.

$$\textit{Обозначим через } \Delta \textit{ величину } = (b-a)\delta^2 = \int\limits_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx$$

очевидно, что $\delta \geq 0$ и $\Delta \geq 0$. *3.1.* $\rhd\rhd$

Пример $\blacktriangleleft$**3.1.** Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi;\pi]$.
Возьмём в качестве функции $g(x)$ произвольный тригонометрический полином степени n:

$$g(x) = T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k\cos(kx) + B_k\sin(kx)$$

„Произвольность “полинома заключается в произвольности выбора коэффициентов $A_0, A_k, B_k,\quad k = 1, 2 \ldots n$.

Вычислим среднеквадратическое отклонение этого произвольного тригонометрического полинома $g(x)$ от заданной фиксированной функции $f(x)$.

На основании этого вычисления попытаемся ответить на вопрос: из всех вожможных тригонометрических полиномов степени n какой менее всех остальных отклоняется от функции $f(x)$, иначе говоря, для какого полинома среднеквадратическое отклонение будет наименьшим?

Тригонометрический полином степени n задаётся набором коэффициентов $\{A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_{n-1}, B_{n-1}, A_n, B$

Поэтому наш вопрос можно переформулировать так: из всех наборов коэффициентов полинома $g(x)$ какой из наборов задаёт такой тригонометрический полином, который меньше остальных отклоняется от $f(x)$?

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x)-T_n(x)]^2\,dx \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx = \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - A_0\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - 2\sum_{k=1}^{n} A_k\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx - 2\sum_{k=1}^{n} B_k\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \\
&+ \text{При этом исчезнут все интегралы от удвоеных произведений} \\
&+\frac{A_0^2}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)\,dx\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(B_k^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)\right)\,dx = \#
\end{aligned}$$

Пусть $a_n,\ b_n$ - - коэффициенты Фурье функции $f(x)$?

$$\# = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi A_0 a_0 - 2\pi\sum_{k=1}^{n} A_k a_k - 2\pi\sum_{k=1}^{n} B_k b_k + \frac{A_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n} A_k^2 + \pi\sum_{k=1}^{n} B_k^2 =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \frac{\pi}{2}(A_0 - a_0)^2 - \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(A_k - a_k)^2 - \pi\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(B_k - b_k)^2 - \pi\sum_{k=1}^{n} b_k^2\,.$$

$$\Delta_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - T_n(x)\right]^2\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right] + \boxed{\frac{\pi}{2}(A_0 - a_0)^2} + \boxed{\pi\sum_{k=1}^{n}(A_k - a_k)^2} + \boxed{\pi\sum_{k=1}^{n}(B_k - b_k)^2}$$

— тождество Бесселя.

Минимизировать получившуюся сумму через коэффициенты $A_0,\ A_k, B_k,\quad k = 1, 2, \dots, n$ мы можем, обращая в нуль слагаемые в рамочках.

Видно, что среднеквадратичное отклонение будет наименьшим, когда $A_0 = a_0,\ A_1 = a_1,\ B_1 = b_1,\ \dots,\ A_n = a_n,\ B_n = b_n$. На этом основании можем сформулировать теорему. **3.1.** ▶

Теорема ◁ 3.1:
Об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.
Среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$, определённой и интегрируемой на $[-\pi;\pi]$, от функции $g(x)$, заменяемой на тригонометрически полином n-ой степени, является минимальным тогда и только тогда, когда в качестве коэффициентов тригонометрического полинома $g(x) = T_n(x)$ используются коффициенты Фурье нашей функции. 3.1. ▷

Доказательство □ ◁ (***III**.3.1*). $A_0 = a_0,\ A_k = a_k,\ B_k = b_k$ в частности из теоремы следует тождество Бесселя.

$$\overline{\Delta_n} = \min_{\substack{\text{по всем наборам}\\ A_0, A_k, B_k}} \Delta_n(A_0, A_1, B_1, \dots, A_n, B_n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

Ч.т.д. (**III**.3.1) ▷ □.

Следствие 1 из (**III**.3.1). Предварительное неравенство Бресселя: Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi;\pi]$. $a_n,\ b_n$ - ее коэффициенты Фурье.
Тогда имеет место неравенство:
$\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx;\ (\forall n \in \mathbb{N})$ 1 из (**III**.3.1).

Следствие 2 из (**III**.3.1). Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi;\pi]$. $a_n,\ b_n$ - ее коэффициенты Фурье.

Тогда ряд, состоящий из квадратов коэффициентов Фурье сходится. 2 из (**III**.3.1).

Доказательство □ ◁ *(2).* Непосредственно следует из неравенства (1). (Ряд знакоположителен, его частичные суммы ограничены сверху Я НЕ УВЕРЕН В ТОЧНОСТИ ПОСЛЕДНЕГО, ВОЗМОЖНО Я ДОПУСТИЛ ОШИБКУ). *Ч.т.д.* (2) ▷ □.

Следствие 3 из (**III**.3.1). Неравенство Бесселя.
Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi;\pi]$. $a_n,\ b_n$ - ее коэффициенты Фурье.
Тогда имеет место:
$\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ 3 из (**III**.3.1).

Замечание □ *3.1.* В дальнейшем будет показано, что в неравенстве (3) имеет место строгое равенство. *3.1.* □

Следствие 4 из (**III**.3.1). Лемма Римана.
Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi;\pi]$. $a_n,\ b_n$ - ее коэффициенты Фурье.
Пусть также

$$a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0;\quad b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0\ ,$$

т.е.

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0\\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n=0\end{cases}$$

4 из (**III**.3.1).

Доказательство □ ◁ *(4).* Доказательство следует из (**??**).
Из $\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\implies(a_n^2+b_n^2)\underset{n\to\infty}{\to}0.$
$0\leq a_n^2\leq b_n^2+a_n^2\to 0\implies$ по т.о ЗхФ (Я НЕ СМОГ РАСШИФРОВАТЬ) $\implies a_n^2\to 0\implies a_n\to 0;$
Аналогично $b_n\to 0.$ *Ч.т.д.* (4) ▷ □.

Замечание □ *3.2.* Существуют сходящиеся тригонометрические ряды, не являющиеся рядами Фурье. *3.2.* □

Пример ◀3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{sqrtn}$ сходится для любого x по (признаку) Диришле. С другой стороны не существует функции $f(x)$ определенной в $[-\pi;\pi]$ для которой этот ряд есть ряд фурье.
$a_n=0;\ b_n=frac1sqrtn\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится **3.2. ▶**

Замечание □ *3.3.* Была поставлена задача приведения примера неравномерно сходящегося тригонометрического ряда, который является рядом Фурье своей суммы. *3.3.* □

Пример ◀3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ сходится для любого x неравномерно на $[-\pi;\pi]$, но тем не менее является рядом Фурье своей суммы. **3.3. ▶**

§4. Почленное дифференцирование рядов Фурье.

Определение ◁ ◁ 4.1. *$f(x)$ определённая на $[a;b]$ называется кусочно-непрерывной на $[a;b]$, если существует разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ такое, что*

1) $f(x) \in C_{(x_i;x_{i+1})}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

2) *Существует* $f(x_i+0) = \lim\limits_{x\to x_i+0} f(x)$; $(f(x_i-0) = \lim\limits_{x\to x_i-0} f(x) i = 1, 2, \dots, n-1$

$f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$; $f(b-0) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ *4.1. ▷ ▷*

Напоминание
Всякая кусочно-непрерывная функция на $[a;b]$ интегрируема на нём.

Определение ◁ ◁ 4.2. *$f(x)$ определённая на $[a;b]$ называется кусочно-непрерывно дифференцируемой на $[a;b]$, если её производная $f'(x)$ является кусочно-непрерывной на $[a;b]$.* *4.2. ▷ ▷*

Теорема ◁ 4.1: *О почленном дифференцировании ряда Фурье. Пусть*

1) $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$

2) $f(-\pi) = f(\pi)$

3) *$f(x)$ кусочно-непрерывно дифференцируема на $[-\pi;\pi]$*

Тогда ряд Фурье для производной $f(x)$ получается из ряда Фурье самой функции $f(x)$ его почленным дифференцированием. Пусть a_n, b_n – коэффициенты Фурье$f(x)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{4.1}$$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx \tag{4.2}$$

4.1. ▷

*Доказательство □ ◁ (**III**.4.1).* Из условия 3) следует $f'(x)$ интегрируема на $[-\pi;\pi]$. Обозначим α_n и β_n коэффициенты Фурье функции $f'(x)$ тогда

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \;\; \alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx \;\; \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx \;\; \beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx \;\; n = 1, 2, \dots \tag{4.3}$$

1) $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0$ согласно второму условию.

2) $\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx df(x) = \frac{1}{\pi} = n\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = nb_n$

3) $\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx df(x) = \frac{1}{\pi} = -na_n$

Итак: $\alpha_n = 0; \quad \alpha_n = b_n; \quad \beta_n = -na_n \quad n = 1, 2, \ldots$
Подставляя найденные выражения в 4.3, получим 4.2
(Условие 3) значит, что периодическое продолжение функции непрерывно на всей оси). *Ч.т.д.* (**III**.4.1) $\triangleright\square$.

Следствие 1 из **III**.4.1. (Оценка коэффициентов Фурье) Пусть

1) $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$
2) $f(-\pi) = f(\pi)$
3) $f(x)$ кусочно-непрерывно дифференцируема на $[-\pi;\pi]$

Тогда для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ a_n и b_n имеют место оценки:

$$|a_n| \leqslant \frac{\gamma_n}{n}; \quad |b_n| \leqslant \frac{\gamma_n}{n} \tag{4.4}$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {\gamma_n}^2 < \infty \Rightarrow a_n = o(\frac{1}{n});\ b_n = o(\frac{1}{n})$ 1 из **III**.4.1.

Доказательство $\square\triangleleft$ *1.* Рассмотрим наряду с коэффициентами Фурье самой функции функции $f(x)$. Тогда из доказательства теоремы ((**III**.4.1)) следует $a_n = -\frac{\beta_n}{n};\ b_n = \frac{\alpha_n}{n} \Rightarrow |a_n| = \frac{|\beta_n|}{n};\ |b_n| = \frac{|\alpha_n|}{n}$
Обозначим: $\gamma_n = \sqrt{{\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2}$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {\gamma_n}^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2) < \infty$ (сходится согласно)
$|\alpha_n| \leqslant \sqrt{{\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2} = \gamma_n;\ |\beta_n| \leqslant \gamma_n$. *Ч.т.д.* 1 $\triangleright\square$.

Следствие 2 из **III**.4.1. (Об абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Фурье). Пусть

1) $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$
2) $f(-\pi) = f(\pi)$
3) $f(x)$ кусочно-непрерывно дифференцируема на $[-\pi;\pi]$

Тогда числовой ряд, составленный из коэффициентов Фурье функции $f(x)$ абсолютно сходится то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ сходится
2 из **III**.4.1.

Доказательство $\square\triangleleft$ *2.* (следует из оценок)

$$|a_n| \leqslant \frac{\gamma_n}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n^2} + (\gamma_n)^2\right) \quad \text{и} \quad |b_n| \leqslant \frac{\gamma_n}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n^2} + (\gamma_n)^2\right)$$

(Использовали неравенство $2ab < a^2 + b^2$)

$$\Longrightarrow |a_n| + |b_n| \leqslant \frac{1}{n^2} + (\gamma_n)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + (\gamma_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n)^2}_{\substack{\text{сходится} \\ \text{согласно следствию 1}}}$$

Ч.т.д. 2 $\triangleright\Box$.

Следствие 3 из **III**.4.1. Пусть

1) $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$
2) $f(-\pi) = f(\pi)$
3) $f(x)$ кусочно-непрерывно дифференцируема на $[-\pi;\pi]$

Тогда ряд Фурье $f(x)$ сходится равномерно на всей оси. 3 из **III**.4.1.

Доказательство $\Box\triangleleft$ *3.* Рассмотрим ряд Фурье нашей функции

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{4.5}$$

$|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqslant |a_n||\cos nx| + |b_n||\sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \, \forall x \in (-\infty;+\infty)$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ сходится (согласно 3), следовательно (согласно признаку Вайерштрасса) (4.6) сходится равномерно на $(-\infty;+\infty)$. *Ч.т.д.* 3 $\triangleright\Box$.

Замечание $\Box$ *4.1.* Что из себя представляет сумма ряда Фурье $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы (**III**.4.1) и этим следствиям?

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad -\infty < x < +\infty$$

1) $S(x) \in C_{(-\infty;+\infty)}$ как сумма непрерывных членов.
2) $S(x)(\beta\gamma\alpha\beta\zeta\mu\ \Xi\Omega\alpha) = S(x)\ \forall x$.
3) В дальнейшем будет доказано (следствие из теоремы Дирищле о локальной сходимости ряда Фурье), что если $f(x)$ удовлетворяет условиям (**III**.4.1) to $S(x) = f(x)\ \forall x \in [-\pi;\pi]$.

4.1. $\Box$

Пример ◀4.1. $f(x) = x^2 \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ =?разрывна в (.)π следовательно ряд сходится неравномерно.
ЗДЕСЬ РИСУНОК. **4.1. ▶**

Теорема $\triangleleft$ *4.2: Пусть*

1) $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$
2) $f(-\pi) = f(\pi)$
3) $f(x)$ *кусочно-непрерывно дифференцируема на* $[-\pi;\pi]$

Тогда ряд Фурье $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$сходится равномерно к $f(x)$.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{4.6}$$

4.2. ▷

Доказательство □ ◁ ***III**.4.2.*

1) Равномерная сходимость следует из следствия 3

2) То, что сходится именно к $f(x)$ следует из теоремы Дирихле которая будет доказана в шестом параграфе.

Ч.т.д. **III**.4.2 ▷ □.

§5. Почленное интегрирование рядов Фурье, равенство Парсеваля.

§5.a. Почленное интегрирование рядов Фурье.

Теорема ◁ 5.1:
О почленном интегрировании ряда Фурье.
Пусть $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$; a_n, b_n *— коэффициенты ряда Фурье функции* $f(x)$.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{5.1}$$

Тогда

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))\, dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin(nx) + \frac{b_n}{n}(1-\cos(nx))\right] \tag{5.2}$$

5.1. ▷

Равенство (5.2) имеет место независимо от того, сходится ли ряд (5.1) к $f(x)$ и сходится ли он вообще для любого x из $[-\pi;\pi]$.

*Доказательство □ ◁ (**III**.5.1).* $F(x) = \int\limits_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt$. Утверждается, что $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы (**??**).
$F(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$ $(F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} \in C_{[-\pi;\pi]})$
$F(-\pi) = F(\pi)$
$F(\pi) - F(-\pi) = \int\limits_0^{\pi}(f(t) - \frac{a_0}{2})dx - \int\limits_0^{-\pi}(f(t) - \frac{a_0}{2})dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(t) - \frac{a_0}{2})dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \frac{a_0}{2}2\pi = \pi a_0 - a_0\pi = 0$

Рассмотрим ряд Фурье этой функции:

$$F(x) = \int\limits_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}]dt = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)); \tag{5.3}$$

A_n, B_n - коэфициенты ряда Фурье функции $F(x)$ следовательно при
$x = 0$ $0 = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; $\mathbf{\frac{A_0}{2} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n}$
$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$;

Пусть $\alpha = nb_n$, тогда согласно теореме (**??**) $\beta = -na_n$, $a_n = nB_n$, $b_n = -nA_n \implies A_n = -\frac{b_n}{n}$; $B_n = \frac{a_n}{n}$; $\frac{A_0}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$

Подставим A_n; B_n и $\frac{A_0}{2}$ в (**??**):

$\int\limits_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum\limits_{n=1}\infty[-\frac{b_n}{n}\cos(nx)\frac{a_n}{n}\sin(nx)] = \sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{a_n}{n}\sin(nx) + \frac{b_n}{n}(1-\cos(nx))]$ т.о. мы пришли к (**??**).

Ч.т.д. (**III**.5.1) $\triangleright\square$.

Замечание $\square$ *5.1.* Из доказательства теоремы вытекает $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{0}^{x}[f(t)-\frac{a_0}{2}]dt\right)dx$ $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\int\limits_{0}^{x}f(t)dt - \frac{a_0}{2}x]dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{0}^{x}f(t)dt\right)dx$ т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{0}^{x}f(t)dt\right)dx$$

5.1. $\square$

Следствие 1 из (**III**.5.1). Полнота тригонометрической системы функций.
Пусть $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$; $a_n,\ b_n$ - коэффициенты Фурье.
Если $a_n = 0,\ n \in \mathbb{N};\ b_n = 0$, то $f(x) \equiv 0$ Иными словами это означает, что кроме тождества о не существовании непрерывной на $[-\pi;\pi]$ ортогональной всем тригонометрическим системам. Это свойство данной системы функций.
Т.о. данное следствие можно сформулировать так:
тригонометрическая система полна в классе непрерывных функций (для разрывных функций это не так).
1 из (**III**.5.1).

Доказательство $\square\triangleleft$ *(1).* Согласно (**III**.5.1) имеет место равенство:

$$\int\limits_{0}^{x}f(x)dt = \frac{a_0x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin(nx) + \frac{b_n}{n}(1-\cos(nx))\right] = 0.$$

$$(\text{т.к. } a_n,\ b_n = 0)$$

$$\int\limits_{0}^{x}f(t)dt = 0 \implies f(x) = 0\ (\forall x \in [-\pi;\pi])$$

Ч.т.д. (1) $\triangleright\square$.

Упражнение $\triangleleft\square$ *5.1.* Привести пример разрывных функций, для которых это не верно. *5.1.* $\square\triangleright$

Следствие 2 из (**III**.5.1). Пусть $f(x),\ g(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$, пусть соответствующие коэффициенты Фурье равны между собой.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$$

для $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = g(x)$ $(\forall x \in [-\pi; \pi])$
2 из (**III**.5.1).

Доказательство □ ◁ *(2).* Рассмотрим вспомогательную функцию $\phi(x) = f(x) - g(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$, $a_n = 0$, $b_n = 0 \implies \phi(x) = 0$ $(\forall x \in [-\pi; \pi])$
Ч.т.д. (2) ▷ □.

§5.б. Равенство Парсеваля.

В предыдущем параграфе было доказано (**??**), что если $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi; \pi]$; a_n, b_n - ее коэффициенты Фурье, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < +\infty$$

и $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

Теорема ◁ 5.2: О равенстве Парсебаля. Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi; \pi]$; a_n, b_n - ее коэффициенты Фурье.
Тогда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \tag{5.4}$$

5.2. ▷

Доказательство □ ◁ ***(III.5.2).*** Для упрощения доказательства теоремы дополниетельно предположим:

1) $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$

2) $f(\pi) = f(-\pi)$

3) $f(x)$ кусочно непрерывна и дифференцируема на $[-\pi; \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \ (\forall x \in [-\pi; \pi]). \tag{5.5}$$

При этом ряд (5.2) сходится равномерно к функции $f(x)$.

$$S_{2n+1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

$$S_{2n+1}(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)\ (\forall x \in [-\pi;\pi])$$

согласно теореме (**??**)

$$S^2_{2n+1}(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f^2(x)\ (\forall x \in [-\pi;\pi])$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} S^2_{2n+1}(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \tag{5.6}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} S^2_{2n+1}(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right]^2 dx = \frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

(интеграл от удвоенной производной равен 0).

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} S^2_{2n+1}(x)dx \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \to (n \to \infty)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ из чего, в свою очередь, следует (5.4). *Ч.т.д.* (**III**.5.2) $\triangleright\square$.

Пример ◂5.1.

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx),\ (\forall x \in [-\pi;\pi]) \tag{5.8}$$

$a_n = 0,\ b_n = frac2(-1)^{n+1}n$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x^2dx = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... - 2\left(\frac{1}{2^2} + ...\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

Проинтегрируем почленно (5.8):

$$\frac{x^2}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

$$b_n = 0,\ a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^5}{5} = \frac{2}{5}\pi^4 \implies 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \pi^4\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{9}\right) = \frac{8\pi^4}{45} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

5.1. ▶

Упражнение ◁ □ *5.2.* Провести аналогичные рассуждения для

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}$$

5.2. □ ▷

§6. Теорема Дирихле о локальной сходимости ряда Фурье.

Напоминание: если $f(x)$ определена в $O_h^+(x_0)$, то

$$f'_+(x_0) = \lim_{x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(при условии, что он существует)
Обобщение понятия:

Определение ◁ ◁ 6.1. *Пусть* $f(x)$ *определена в* $O_h^+(x_0) = (x_0; x_0+h$*; пусть существует* $f(x_0+h) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$
Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}$, *то он называется правой предельной производной функции* $f(x)$ *в* $(.)x_0$ *и обозначается* $f'_+(x_0)$
Аналогично определяется левая предельная производная f_- *в* $(.)x_0$*:*

$$f'_-(x) \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0}$$

6.1. ▷ ▷

Пример ◀6.1. f(x)=В (.)1 функция не определена и терпит разрыв $f'_+(1) = 0$ $f'_-(1) = 1$
6.1. ▶
Лемма ◁ ⊏ р 6.1: *Об интеграле по периоду от периодической функции.*
Пусть $f(x)$ *определена и интегрируема на* $[0; 2\pi]$, $f(x + 2\pi) = f(x)\forall x$.
Тогда $\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx \quad (\forall x)$ *6.1* ⊐ ▷

Доказательство □ ◁ (***III****.6.1*).

$$\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int\limits_a^0 + \int\limits_0^{2\pi} + \int\limits_{2\pi}^{2\pi+a} = -\int\limits_0^a + \int\limits_0^{a+2\pi} + \{\int\limits_{2\pi}^{2\pi+a} f(x)dx = [x - 2\pi = t \; dx = dt] = \int\limits_0^a f(t + 2\pi)dt = \int\limits_0^a f(t)dt\} + \int\limits_0^a = \int\limits_0^2 \pi.$$

Ч.т.д. (**III**.6.1) ▷ □.

Лемма ◁ ⊏ р 6.2: *Ядро Дирихле.*

$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}}$ $\quad (\forall x) D_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \dots + \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$ *Ибо в точках, где* $\sin\frac{x}{2} = 0$ *правая часть допускает доопределение по непрерывности.* *6.2* ⊐ ▷

Лемма ◁ ⊏ р 6.3: *Интеграл Дирихле.*
Пусть $f(x)$ *определена и интегрируема на* $[-\pi; \pi]$, $a_n,\ b_n$*-её коэффициенты Фурье.* $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,\ x_0 \in [-\pi; \pi]$ $\quad \delta\delta \;\; \alpha\epsilon \;\; \gamma\Upsilon \quad S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^n a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{\pi} [\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos kx \cos kx_0 +$

$\sin kx \sin kx_0)f(x)dx] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)]f(x)dx =$
$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-x_0)}{2\sin\frac{(x-x_0)}{2}}f(x)dx$

Оказывается, что для энной частичной суммы ряда функции $f(x)$ в (.)x_0 справедлива формула: $S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-x_0)}{2\sin\frac{(x-x_0)}{2}}f(x)dx$ *6.3* ⊐ ▷

Замечание □ *6.1.* Интеграл, стоящий в правой части этой формулы, называется интегралом Дирихле функции $f(x)$. *6.1.* □

Лемма ◁ ⊏ *p 6.4: Преобразование интеграла Дирихле для 2π периодической функции.*
Пусть $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi;\pi]$, $f(x+2\pi) = f(x)\forall x$.
Рассмотрим $S_n(x)$- энную частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ $S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-x_0)}{2\sin\frac{(x-x_0)}{2}}f(x)dx =$

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-x_0)}{2\sin\frac{(x-x_0)}{2}}f(x)dx = [x-x_0 = t\ dx = dt] = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}f(x_0+t)dt = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}f(x_0+t)dt}_{\beta\alpha\ \alpha\Pi\Upsilon\quad t=-y} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$

$t)dt = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{y}{2}}f(x_0-y)dy + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}f(x_0+t)dt$ *Итак*

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt \tag{6.1}$$

Для 2π-периодичной функции интеграл Дирихле приеобразуется к виду (6.1).
6.4 ⊐ ▷

Лемма ◁ ⊏ *p 6.5: Лемма Римана:*
Пусть $g(x)$ определена и интегрируема на $[0;\pi]$
Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{\pi}g(x)\sin(n+\frac{1}{2})xdx = 0$ *6.5* ⊐ ▷

Упражнение ◁ □ *6.1.* Вывести эту лемму Римана из леммы Римана параграфа 3. *6.1.* □ ▷

Замечание □ *6.2.* Эта лемма Римана (как и та лемма Римана) являются частными случаями общей леммы Римана: Если $g(x)$ определена и интегрируема на $[a;b]$,то существует $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_{a}^{b}g(x)\sin\lambda xdx = 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_{a}^{b}g(x)\cos\lambda xdx = 0$ *6.2.* □

Теорема ◁ *6.1: Теорема Дирихле о локальной сходимости ряда Фурье. Пусть*

1) $f(x)$ *кусочно-непрерывна на* $[-\pi;\pi]$

2) $f(x+2\pi) \equiv f(x)$

3) $\exists \underbrace{f'_+(x_0),\ f'_-(x_0)}_{\beta\alpha\Omega\Upsilon\ \ \Xi\ \xi\ \Xi\theta\alpha\epsilon\ \tau\ \Pi\xi\ \ \Delta\beta\gamma\Xi\Lambda\Xi\ \pi\Omega\alpha\ \ \delta\ \ \xi\delta\ \ \Xi}$ *(x_0-произвольная фиксированная точка)*

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к значению $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ В частности, если $f(x)$ непрерывна, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $f(x_0)$.
6.1. $\triangleright$

Доказательство $\square \triangleleft$ ***(III**.6.1).* Пусть $S_n(x_0)$-энная частичная сумма ряда Фурье. Тогда согласно лемме (**III**.6.5) $S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$; Заметим, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(x) \Rightarrow \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x_0+0)+f(x_0-0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ рассмотрим разность : $S_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \{[f(x_0+t)+f(x_0-t)] - [f(x_0+0)+f(x_0-0)]\}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x_0+t)-f(x_0+0)]\sin(n+\frac{1}{2})t)(2\sin\frac{t}{2})dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [f(x_0-t) - f(x_0-0)]\sin(n+\frac{1}{2})t)(2\sin\frac{t}{2})dt$ Докажем, что каждый из интегралов $\to\infty$ при $n\to\infty$
Рассмотрим $\phi(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{2\sin\frac{t}{2}}$
Существует $\lim\limits_{t\to+0}\phi(t) = \lim\limits_{t\to+0}[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}] = f'_+(x_0) \Rightarrow \phi(t)$ кусочно-непрерывна на $[0;\pi] \Rightarrow$ $(\delta\alpha\Theta.\ \Xi\quad \Xi\ \Upsilon\quad \Omega\ )\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \phi(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt = 0$ Аналогично доказывается, что $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \psi(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt = 0 \psi(t) = \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{2\sin(n+\frac{1}{2})}(\exists\lim\limits_{t\to-0} = f'_-(x_0))$
Из доказательства вытекает, что $\exists\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}] = 0 \Rightarrow \exists\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$
Ч.т.д. (**III**.6.1) $\triangleright\square$.

Определение $\triangleleft\triangleleft$ *6.2. Пусть $f(x)$ определена на $[a;a+T]$, $T>0$ T-переодическим продолжением функции $f(x)$ называется $\overline{f(x)}$ такая, что*

1) *$\overline{f}$ определена на всей оси.*
2) *$\overline{f(x+T)} = \overline{f(x)}$.*
3) *$\overline{f(x)} = f(x) \quad \forall x \in (a;a+T)$.*

6.2. $\triangleright\triangleright$

Замечание $\square$ *6.3.* Из определения следует, что Т-переодическое продолжение функции определяется неоднозначно, а именно оно определяется с точностью до значения на концах интервала.
ЗДЕСЬ РИСУНОК *6.3.* $\square$

Следствие 1 из **III**.6.1. Пусть

1) $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi;\pi]$ $\overline{f(x)}$ —- 2π-периодична
2) $\exists\overline{f'_+(x_0)}$; $\overline{f'_-(x_0)}$

Тогда имеет место равенство $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx_0 + b_n\sin nx_0 = \frac{\overline{f(x_0+0)}+\overline{f(x_0-0)}}{2}$ где a_n, b_n коэффициенты Фурье функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$. 1 из **III**.6.1.

Замечание $\square$ *6.4.* В случае, если $\overline{f}$ непрерывна в $(.)x_0$ то имеет место равенство $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx_0 + b_n\sin nx_0 = \overline{f(x_0)}$ *6.4.* $\square$

Замечание □ *6.5.* Если $\overline{f(x)} \in C_{(-\infty;+\infty)}$ и $\exists f'_+,\quad f'_- \forall x$ то имеет место равенство : $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \overline{f(x)} \forall x$ $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = f(x) \forall x \in [-\pi;\pi]$. *6.5.* □

Замечание □ *6.6.* Пусть

1) $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$
2) $f(-\pi) = f(\pi)$
3) $\exists f'_+(x_0);\ f'_-(x_0)\ \forall x_0 \in (-\pi;\pi)$

Тогда имеют место равенства о которых было сказано в замечании (**6.5**) *6.6.* □

ГЛАВА **IV**

Интегралы, зависящие от параметра.

§1. Основные определения.

Определение $\lhd\lhd$ *1.1.* *Пусть* $f(x,y) \in C_{(\Pi)}$, $\Pi = \{(x,y) | (x,y) \in R^2,\ a \le x \le b,\ C \le y \le d\}$. *Тогда*

$$\forall y \in [c,d] \text{ определена функция } F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx \tag{1.1}$$

Функция $F(y)$ *называется интегрально зависимой от параметра.* *1.1.* $\rhd\rhd$

Замечание $\square$ *1.1.* Часто приходится рассматривать интегральную зависимость от параметра более общего вида:

$$F(y) = \int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx, \text{ где } a \le \phi(y);\ \psi(y) \le b \quad (\forall y \in [c,d]) \tag{1.2}$$

1.1. $\square$

Замечание $\square$ *1.2.* Задача связанная с (1.1) и (1.3) заключается

1) в исследовании их на непрерывность
2) в исследовании их на дифференцируемость
3) в исследовании их на интегрируемость под знаком интеграла (?)

1.2. $\square$

Замечание $\square$ *1.3.* В качестве вспомогательного объекта будет фигурировать $\Im(y,u,v) = \int\limits_u^v f(x,y)dx,\ a \le u;\ v \le b \quad f(x,y) \in C_{(\Pi)}$. Очевидно, что интеграл определен (Дмитрий Михайлович, может имеет смысл сделать сдесь ссылку, а то не кристально ясно, какой интеграл?..) $\Im(y,u,v)$ определен(а) в $D = \{(y,u,v) | (y,u,v) \in R^3, c \le y \le d,\ a \le u \le b,\ a \le v \le b\}$ *1.3.* $\square$

Замечание □ *1.4.* $\int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx = \Im(y, \phi(y), \psi(y))$ *1.4.* □

Теорема ◁ *1.1: О непрерывности интеграла, зависящего от параметра.*
Пусть $f(x,y) \in C(\Pi)$;
Тогда $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx \in C_{[c;d]}$ *1.1.* ▷

Доказательство □ ◁ (***IV****.1.1*). $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ из $|y - y_0| < \delta \implies |F(y) - F(y_0)| < \varepsilon\ (y_0 \in (c;d))$
Так как функция $f(x,y)$ непрерывна в $C(\Pi)$, а Π - компактно, то по теореме Кантора (**??**) функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна в Π и $\forall \varepsilon > 0$ по $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$

$$\exists \delta > 0 : \begin{cases} |x_1 - x_2| < \delta\ (x_1, y_1) \in \Pi \\ |y_1 - y_2| < \delta\ (x_2, y_2) \in \Pi \end{cases}$$

таким образом $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, положим $x_1 = x_2 = x$, и, ВИДИМО, $y_1 = y_2 = y$ тогда из $|y - y_0| < \delta$ следует $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
Рассмотрим $|F(y) - F(y_0)| = |\int\limits_a^b f(x,y)dx - \int\limits_a^b f(x,y_0)dx| \le \int\limits_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|dx < \dfrac{\varepsilon}{b-a}\int\limits_a^b dx = \varepsilon$
Ч.т.д. (**IV**.1.1) ▷ □.

Упражнение ◁ □ *1.1.* Провести аналогичные рассуждения для $y_0 = c$ $y_0 = d$, доказав одностороннюю непрерывность в этих точках *1.1.* □ ▷

Замечание □ *1.5.* Условие непрерывности функции в теореме (**IV**.1.1) существенно:

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2};\ (0,0) \text{ - точка разрыва}$$

$$F(y) = \int\limits_0^1 \frac{ydx}{x^2+y^2} = \frac{y}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big|_0^1 = \frac{y}{y}\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$$

1.5. □

Замечание □ *1.6.* Тем не менее условие непрерывности функции в теореме (**IV**.1.1) отнюдь не является необходимым:

$$f(x,y) = sgn(x-y)$$

Для $0 \le x \le 1$ $0 \le y \le 1$ $\quad F(y) = \displaystyle\int\limits_0^1 sgn(x-y)dx =$

$$\int sgn(x-y)dx + \int_y^1 sgndx =$$

$$-y + x|_y^1 = 1 - 2y \in C_{[0;1]}$$

1.6. $\square$

Теорема $\triangleleft$ *1.2:* *О непрерывности интеграла, зависящего от 3х параметров.*
Пусть

1) $f(x, y) \in C(\Pi)$

2) $\Pi\{(x, y)|(x, y) \in R^2, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

Тогда $\Im(y, u, v) = \int\limits_u^v f(x, y)dx \in C_D$ *1.2.* $\triangleright$

Упражнение $\triangleleft\square$ *1.2.* Доказательство провести самостоятельно *1.2.* $\square\triangleright$

Теорема $\triangleleft$ *1.3:* *Обобщенная теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра(-ов).*
Пусть

1) $f(x, y) \in C(\Pi)$

2) *Функции* $a \leq \phi(y) \leq b$ *и* $a \leq \psi(y) \leq b \quad (\forall y \in [c; d])$

3) $\phi(y),\ \psi(y) \in C_{[c;d]}$

Тогда

$$F(y) = \int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx \in C_{[c;d]} \tag{1.3}$$

1.3. $\triangleright$

Доказательство $\square\triangleleft$ ***(IV****.1.3).*

$$F(y) = \int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} = \Im(y, \phi(y), \psi(y))$$

1) $\Im(y, u, v) \in C_D$

2) $u = \phi(y)$ и $v = \psi(y) \ \in C_{[c;d]}$

таким образом согласно теореме о непрерывности сложной функции

$$\Im(y, \phi(y), \psi(y)) \in C_{[c;d]}$$

Ч.т.д. (**IV**.1.3) $\triangleright\square$.

§2. Дифференцирование и интегрирование интеграла, зависящего от параметра.

Теорема $\lhd$ *2.1: Правило Лейбница о дифференцировании и интегрировании по параметру.*
Пусть $f(x,y) \in C(\Pi)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi)$.

Тогда функция $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *дифференцируема в* (c,d) *при этом*

1) $F^{'}(y) = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}dx$ *т.е.*

2) $\dfrac{d}{dy}\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) = \int\limits_a^b \dfrac{\partial d}{\partial y}dy$

Иными словами наш интеграл зависящий от параметра допускает дифференцирование по параметру под знаком интеграла. *2.1.* $\rhd$

Доказательство $\square$ $\lhd$ (***IV****.2.1*).

$$\exists \lim_{y\to y_0} \frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx$$

$$\left|\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_a^b \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\zeta)(y-y_0)}{y-y_0}dx - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx\right| =$$

$$(y_0 < \zeta < y \text{ либо } y < \zeta < y_0)$$

$$= \int\limits_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\zeta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right| dx$$

Из условия следует, что $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ р.н. (???) в Π

Поучена оценка:

$$\left|\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}\right| \le \int\limits_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\zeta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right| dx$$

$$\text{где } \begin{cases} \text{либо } y_0 < \zeta < y \\ \text{либо } y < \zeta < y_0 \end{cases}$$

$0 < |\zeta - y_0| < |y - y_0|$ т.к. по условию $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi)$, то $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ равномерно непрерывна в Π, т.е. $\forall\varepsilon > 0$ (по $\dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$) $\exists\delta > 0 :$ из

$$\begin{cases} |x_1 - x_2| < \delta \ (x_1, y_1) \in \Pi \\ |y_1 - y_2| < \delta \ (x_2, y_2) \in \Pi \end{cases} \implies |\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial y}| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Положим, что $x_1 = x_2 = x \in (a; b);\ y_1 = y,\ y_2 = y_0$, тогда из $0 < |y - y_0| < \delta$ будет следовать, что $0 < |\zeta - y_0| < \delta \implies |\dfrac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(x, y_0)}{\partial y}| < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \implies \left|\dfrac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} - \int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_a^b dx =$ $\varepsilon \implies \exists \quad F' = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} dx$ *Ч.т.д.* (**IV**.2.1) $\triangleright \square$.

Упражнение $\triangleleft \square$ *2.1.* Проведя аналогичные рассуждения для точек c и d, доказать существование односторонних производных $F_+'(C) = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x, c)}{\partial y} dx$ и $F_-'(C) = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x, d)}{\partial y} dx$ *2.1.* $\square \triangleright$

Замечание $\square$ *2.1.* Рассмотрим интеграл зависящий от трех параметров:

$$\Im(y, u, v) = \int\limits_u^v f(x, y) dx \tag{2.1}$$

где $f(x, y) \in C(\Pi),\ a \le u, v \le b$, тогда существует $\dfrac{\partial \Im}{\partial u} = -f(u, y),\ \dfrac{\partial \Im}{\partial v} = -f(v, y)$. Согласно теореме Ньютона-Лейбница (**??**), если $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi)$ то по (**IV**.2.1) $\exists \frac{\partial \Im(x,y)}{\partial y} dx$ *2.1.* $\square$

Замечание $\square$ *2.2.* Рассмотрим (2.1), где $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \in C(\Pi),\ a = u,\ b = v$. Тогда $\dfrac{\partial \Im}{\partial u} = \dfrac{\partial \Im}{\partial v};\ \dfrac{\partial \Im}{\partial y} \in C(\overline{D})$, где $\overline{D} = \{(y, u, v) | (y, u, v) \in R^3,\ c < y < d,\ a < u,\ v < b\}$, следовательно $\Im(y, u, v)$ - дифференцируем(а) в $\overline{D}$. *2.2.* $\square$

Теорема $\triangleleft$ *2.2: Обобщенное правило Лейбница о дифференцировании по параметру.*

$$F(y) = \int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \tag{2.2}$$

Пусть выполнены условия:

1) $F(x, y),\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \in C(\Pi)$

2) $a < \phi(y),\ \psi(y) < b\ \forall y \in [c; d]$

3) $\exists \phi'(y),\ \psi'(y)\ \forall y \in [c; d]$

Тогда справедлива формула:

$$F^{'}(y) = f(\psi(y), y)\psi^{'}(y) - f(\phi(y), y)\phi^{'} + \int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx \tag{2.3}$$

2.2. $\triangleright$

Доказательство $\square \triangleleft$ ***(IV**.2.2).* $F(y) = \Im(y, \phi(y), \psi(y))$, где $\Im(y,u,v) = \int\limits_u^v f(x,y)dx$ Фынкция $F(y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы о неразрывности (??) сложной функции, согласно которой имеет место:

$$F^{'}(y) = \frac{\partial \Im}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{'}(y)}{\partial u} + \frac{\partial \Im}{\partial v}\psi^{'}(y) \text{ здесь где-то бред?..}$$

$$F^{'}(y) = \int\limits_{\phi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx - f(\psi(y), y)\psi^{'}(y) + f(\phi(y), y)\phi^{'}$$

Что совпадает с (2.3). *Ч.т.д.* (**IV**.2.2) $\triangleright \square$.

Теорема $\triangleleft$ *2.3: Об интегрировании по параметру под знаком интеграла.*

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx \tag{2.4}$$

Пусть $f(x,y) \in C(\Pi)$.
Тогда интеграл (2.4) допускает интегрирование по параметру y под знаком интеграла, т.е. имеет место формула:

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx. \tag{2.5}$$

2.3. $\triangleright$

Доказательство $\square \triangleleft$ ***(IV**.2.3).*

$$\int\limits_c^z \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^z f(x,y)dy \right) dx \; \forall z \in [c,d] \tag{2.6}$$

формула (2.5) получается из формулы (2.6) при $z = d$.
Рассмотрим вспомогательные функции z:

$$g(z) = \int\limits_c^z \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy; \; h(z) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^z f(x,y)dy \right) dx$$

Эти функции определены на $[c,d]$ и дифференцируемы на этом отрезке. При этом $g'(z) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$.

$$\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_c^z f(x,y)dy = f(x,z)$$

$h'(z) = \displaystyle\int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial z}\left(\int\limits_c^z f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_a^b f(x,z)dx \implies g'(z) = h(z) + Const$, подставим $x = c$, тогда получим: $g(c) = 0;\ h(c) = 0;\ z = c \implies Const = 0 \implies g(z) = h(z)\ \forall z \in [c,d]$ Формула (2.6) установлена, а формула (2.5) получается из (2.6) *Ч.т.д.* (**IV**.2.3) $\triangleright\square$.

Пример ◀2.1. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx,\ 0 < a < b$. Т.к. $\dfrac{x^b - x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y dy$, то $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_a^b x^y dy\right)dx = \int\limits_a^b\left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1\right)dy = \int\limits_a^b \frac{y+1}{1}dy = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}$ **2.1. ▶**

Определение ◁ ◁ 2.1. *Число* $g = \displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}dx$ *- константа* **Каталана**. *2.1.* $\triangleright\triangleright$

§3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Понятие равномерной сходимости.

Определение ◁ ◁ 3.1.
Пусть

1) $f(x,y)$ *определена в* $D = \{(x,y)|(x,y) \in R^2,\ a \le x < +\infty,\ y \in E < R\}$

2) $f(x,y)$ *интегрируема по* x *на* $[a,A]\ \forall A > a;\ \forall y \in E$

3) $\exists \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x,y)dx = \Im(y),\ (\forall y \in E)$

Тогда на E *определена функция:*

$$\Im(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\ (\forall y \in E) \tag{3.1}$$

называемая несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра. *3.1.* $\triangleright\triangleright$

Замечание $\square$ *3.1.* На языке "$\varepsilon - M$" определение (**IV**.3.1) рачшифровывается так: $\forall\varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon, y) > 0:$ из $A > M \implies \left|\displaystyle\int\limits_a^A f(x,y)dx - \Im(y)\right| < \varepsilon\ (\forall y \in E)$ *3.1.* $\square$

Замечание □ *3.2.* В случае, если в определении (**IV**.3.1) M оказалась зависящей тольуо от ε, говорят, что имеет место равномерная сходимость. *3.2.* □

Замечание □ *3.3.* Неравенство $|\int\limits_a^A f(x,y)dx - \Im(y)| < \varepsilon$ $(\forall y \in E)$ может быть представленно в виде $|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx| < \varepsilon$ *3.3.* □

Замечание □ *3.4.* Аналогично определение для $\Im(y) = \int\limits_{+\infty}^{a} f(x,y)dx$ *3.4.* □

Определение ◁ ◁ *3.2.* *Пусть выполнены условия определения (**IV**.3.1), тогда (3.1) называется равномерно сходящимся на множестве E, если:* $\forall \varepsilon > 0\ \exists M = M(\varepsilon)$ *(но не зависит от y)* $> 0:$ *из* $A > M \implies \left|\int\limits_a^A f(x,y)dx - \Im(y)\right| < \varepsilon\ (\forall y \in E)$ *3.2.* ▷ ▷

Замечание □ *3.5.* То множество, на котором определен интеграл $\Im$ может не совпадать с множеством, на котором он равномерно сходится, но, в частности, может с ним и совпадать. *3.5.* □

Замечание □ *3.6.* Из определения (**IV**.3.2) вытекает, что имеет место аналогия между интkграλом первого рода и равномерно сходящейся функциональной последовательностью. *3.6.* □

Теорема ◁ *3.1:* *Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода.*
Для того, чтобы (3.1) сходился на E необходимо и достаточно $\forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) > 0:$ *из* $\overline{\overline{A}} > \overline{A} > M \implies \left|\int\limits_{\overline{A}}^{\overline{\overline{A}}} f(x,y)dx\right| < \varepsilon;\ (\forall y \in E)$ *3.1.* ▷

Упражнение ◁ □ *3.1.* Доказать теорему (**IV**.3.1) самостоятельно. *3.1.* □ ▷

Теорема ◁ *3.2:* *Признак Вейрштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода.*
Пусть

1) $|f(x,y)| \le g(x)\ \forall y \in E; \forall x \in [a;+\infty]$
2) $\int\limits_{a_1}^{+\infty} g(x)dx$ *сходится при* $a_1 \ge a$

Тогда (3.1) сходится равномерно на E. *3.2.* ▷

Упражнение ◁ □ *3.2.* Доказать теорему (**IV**.3.2) самостоятельно. *3.2.* □ ▷

В этом случае известно, что интеграл (**??**) мажорирует интеграл (3.1) или является мажорантой.

Упражнение ◁ □ *3.3.* Исследовать на равномерную сходимость $\Im(y) = \int\limits_0^{+\infty} y^\beta e^{-yx^\alpha}dx;\ \alpha,\ \beta > 0;\ y \in (0,+\infty)$ *3.3.* □ ▷

Упражнение $\lhd\square$ *3.4.* Сформулировать для интеграла (3.1) признаки равномерной сходимости Диришле и Абеля. *3.4.* $\square\rhd$

Замечание $\square$ *3.7.* Условия теоремы (**IV**.3.2) отнюдь не являются необходимыми для равномерной сходимости, ибо сущестует равномерно сходящийся и не мажорируемый несобственный интеграл. *3.7.* $\square$

Пример ◀3.1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x+y}dx,\ y\in(0,+\infty)$ сходится равномерно согласно Диришле $\frac{1}{x+y}\underset{y}{\rightrightarrows}0$ и монотонно $\int\limits_1^{+\infty}\frac{|\sin(x)|}{|x+y|}dx,\ y\in(0,+\infty)$ расходится. **3.1. ▶**

§4. Исследование равномерной сходимости.

Лемма $\lhd\sqsubset$ *р 4.1:* *Пусть интеграл (3.1) сходится равномерно на E. Рассмотрим наряду с (3.1)*

$$\Im_n(y)=\int\limits_a^A f(x,y)dx;\ n\in\mathbb{N},\ n>a \tag{4.1}$$

Тогда (4.1) равномерно сходится на E. *4.1* $\sqsupset\rhd$

Доказательство $\square\lhd$ (***IV****.4.1)*. Из условия вытекает, что $\forall\varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon)>0;\ A>M \implies \left|\int\limits_a^A f(x,y)dx-\Im(y)\right|<\varepsilon\ \forall y\in E$. Т.е.$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0\in\mathbb{N};\ n>N \implies |\Im_n(y)-\Im(y)|<\varepsilon\ \forall y\in E \implies$ $\Im_n(y)$ сходится равномерно по определению на E. *Ч.т.д.* (**IV**.4.1) $\rhd\square$.

Теорема $\lhd$ *4.1:* *О непрерывности несобственного интеграл первого рода, зависящего от параметра.*
Рассмотрим (3.1): пусть

1) $f(x,y)\in C(\mathcal{D}),\ \mathcal{D}=\{(x,y)|(x,y)\in R^2 a\le x\le+\infty;\ y\in[c,d]\}$

2) ***Интеграл*** *(3.1) сходится равномерно на [c,d]*

Тогда $\Im(y)\in C_{[c;d]}$ *4.1.* $\rhd$

Доказательство $\square\lhd$ (***IV****.4.1)*. Рассмотрим (4.1). Из условия следует, что $f(x,y)\in C(\Pi_n);\ \Pi_n=\{(x,y)|(x,y)\in R^2;\ a\le x\le n, c\le y\le d\}$ $\Im_n(x)$ сходится равномерно к $\Im(y)$ при $n\to\infty;\ y\in[c,d]$. Согласно теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра (**IV**.1.1) $\Im_n(y)\in C_{[c,d]}$ $\Im_n\underset{\mathcal{D}-?}{\rightrightarrows}\Im(y)$. Из всего этого вытекает, что $\Im(y)$, согласно теореме о непрервности предельной функции, есть равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций. *Ч.т.д.* (**IV**.4.1) $\rhd\square$.

Замечание □ *4.1.* Условие равномерной сходимости (3.1) в теореме (**IV**.4.1) существенно. *4.1.* □

Пример ◀4.1.

$$\Im(y) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{yx^2} dx; \qquad x \in [0, +\infty]$$

$$\Im(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, & y > 0 \end{cases}$$

4.1. ▶

Замечание □ *4.2.* Тем не менее условие равномерной сходимости отнюдь не является необходимым. *4.2.* □

Пример ◀4.2.

$$\Im(y) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{yx^2} dx; \qquad x \in (0, +\infty)$$

$$\Im(y) \in (0, +\infty)$$

4.2. ▶

Пример ◀4.3. ДМИТРИЙ МИХАЙЛОВИЧ, ЛЯМБДА - λ - ЗДЕСЬ СМОТРИТСЯ ГОРАЗДО ЛУЧШЕ... Мастер.

$$\Im(y) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-yx^\alpha} dx; \qquad y \in (0; +\infty);\ 0 < \alpha < 2$$

Sup модуля "хвоста" не существует.

Положим: $yx^\alpha = t,\ x = \dfrac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{y^{\frac{1}{\alpha}}};\ dx = \dfrac{1}{y^{\frac{1}{\alpha}}} \dfrac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt$

$$\frac{1}{\alpha y^{\frac{1}{\alpha}}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{\alpha}} dt \in C_{(0,+\infty)}\ \forall \alpha \in (0, 2)$$

Но сходится неравномерно, т.к. Sup модуля "хвоста" не существует. **4.3. ▶**

Теорема ◁ *4.2:*
Интегрирование по параметру несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.
$\Im(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y) dx$:.

Пусть

1) $f(x,y) \in C(\mathcal{D})$; $\quad \mathcal{D} = \{(x,y) | (x,y) \in R^2,\ a \le x < +\infty,\ c \le yled\}$,

2) $\Im(y)$ *сходится равномерно на* $[c,d]$.

Тогда (3.1) допускает интегрирование по параметру под знаком интеграла, т.е. имеет место формула:

$$\int\limits_c^d f(y)dy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right] dy = \int\limits_a^{+\infty} \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx \tag{4.2}$$

4.2. $\triangleright$

Доказательство $\square \triangleleft$ ***(IV****.4.2).* $\Im_n(y) = \int\limits_a^n f(x,y)dx$ Интеграл (4.2) существует, т.к. $\Im(y) \in C_{[c,d]}$.

Согласно лемме (**IV**.4.1) $\Im_n(y) \rightrightarrows \Im(y)$ на $[c,d]$ $\implies$ $\int\limits_c^d \Im_n(y)dy \to \int\limits_c^d \Im(y)dy = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^d \Im_n(y)dy =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^n f(x,y)dx\right] dy = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^n \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx =$ < Согласно теореме (**IV**.2.3) > $= \int\limits_a^{+\infty} \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx$.

Ч.т.д. (**IV**.4.2) $\triangleright \square$.

Пример ◀4.4. $\Im(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}dx$, $\quad 0 < a \le y \le b$ интеграл сходится равномерно на $0 \le y \le b$, $0 \le e^{-xy} \le e^{-ay}$. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ сходится $\implies$ сходится равномерно (Согласно Вейерштрассу) $\Im(y) = \frac{1}{y}$ но согласно теореме (**IV**.4.2) $\int\limits_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a} = \int\limits_0^{+\infty}\left[\int\limits_a^b e^{-xy}dy\right]dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$. Итак $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \ln\frac{b}{a}$ **4.4. ▶**

Замечание $\square$ *4.3.* Данная формула представляет собой частный случай формулы

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \tag{4.3}$$

$$f(x) \in C_{(0;+\infty)},\ \forall A \in (0,+\infty) \int\limits_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx \text{ сходится.}$$

4.3. $\square$

Замечание □ *4.4.* ДМИТРИЙ МИХАЙЛОВИЧ, БРЕД ЗДЕСЬ КАКОЙ-ТО... Этот прием при весьма общих условиях может быть распространен на случай, когда по параметру производной в бесконечных пределах. Иными словами при весьма общих условиях вправедлива

$$\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy = \int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx \tag{4.4}$$

4.4. □

Пример ◀4.5. $\mathfrak{I} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ - Интеграл Эйлера-Пуассона -

Замена: $x = ty,\ dx = y\,dt$ даёт $\mathfrak{I} = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-t^2y^2}\,dt$

Наряду с $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-t^2y^2}\,dt$ рассмотрим интеграл $e^{-y^2}\cdot\int\limits_0^{+\infty} ye^{-t^2y^2}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-(1+t^2)y^2}\,dt = S(y;+\infty)$

Согласно теореме **IV**.4.2 последний интеграл можно интегрировать по параметру y. Условия теоремы **IV**.4.2 выполнены:

1) $f(t,y)\in C(\mathcal{D});\quad \mathcal{D} = \{(t,y)\,|\,(t,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leqslant t\leqslant +\infty,\ 0\leqslant y\leqslant +\infty\}$, Очевидно $f(t,y) = ye^{-(1+t^2)y^2}$ - **непрерывна** на данном множестве.

2) $S(y,+\infty) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-(1+t^2)y^2}\,dt$ сходится **равномерно по y** на $[c,d] = [0;+\infty]$.
Докажем равномерную сходимость: докажем, что

$$S(y,A) = \int_0^A ye^{-(1+t^2)y^2}\,dt \underset{y\in[0;+\infty]}{\rightrightarrows} S(y,+\infty) \quad \text{при } A\to+\infty$$

Преобразуем $S(y,A)$ в обратную сторону:

$$S(y,A) = e^{-y^2}\cdot\int_0^A e^{-(ty)^2}\,d(ty) = e^{-y^2}\cdot\int_0^A e^{-x^2}\,dx$$

Итак, нам необходимо показать, что

$$S(y,A) = e^{-y^2}\cdot\int_0^A e^{-x^2}\,dx \underset{y\in[0;+\infty]}{\rightrightarrows} S(y,+\infty) \quad \text{при } A\to+\infty$$

Оценим сверху модуль разности $S(y,+\infty) - S(y,A)$ величиной, не зависящей от y и стремящейся к нулю при $A \to +\infty$.

$$|\, S(y,+\infty) - S(y,A)\,| = \left| e^{-y^2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx - e^{-y^2} \cdot \int\limits_0^{A} e^{-x^2}\,dx \right| =$$

$$= e^{-y^2} \cdot \int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leqslant \int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leqslant \int\limits_A^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-A} \underset{y\in[0;+\infty]}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } A \to +\infty\ .$$

Равномерная сходимость тем самым доказана, и мы имеем право интегрировать по y под знаком интеграла.

$$\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{I} = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy \right) \cdot \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \right) = \left\langle \text{замена } x = ty \right\rangle = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2} \left(y \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2y^2}\,dt \right) dy =$$

мы перешли к повторному интегралу

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} y e^{-(1+t^2)y^2}\,dt \right) dy = \quad \text{меняем порядок интегрирования} \quad = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} y e^{-(1+t^2)y^2}\,dy \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)y^2}\,d(y^2) \right) dt = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{1+t^2} \cdot e^{-(1+t^2)y^2}\, \Big|_{y=0}^{y=+\infty} \right) dt = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{arctg} t)\, \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{Получили} \quad \mathfrak{I}^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

4.5. ►

ГЛАВА **V**

Кратные интегралы.

§1. Двойной интеграл и его свойства.

§1.a. Квадрируемые множестваи площадь плоской фигуры.

Определение ◁ ◁ 1.1. *Мы будем рассматривать ограниченные множества $D \subseteq R^2$ Если $D = (a; b)$-прямоугольник со сторонами a и b то существует $S(D) = ab$* *1.1. ▷ ▷*

Определение ◁ ◁ 1.2. *Пусть $D \subset R^2$; $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_n$где $D_i = \ _i(a_i; b_i), i = 1, 2, \ldots, n$ где D_i и D_k при $i \neq k$ не имеют общих внутренних точек. Могут пересекаться границы. Тогда такое множество называется ступенчатым (ступенчатой фигурой, ступенчатым телом). В этом случае полагаем $S(D) = \sum\limits_{i=1}^{n} S(D_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$* *1.2. ▷ ▷*

Определение ◁ ◁ 1.3. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$-ограниченное множество. Нижней площадью множества D (обозначение $\underline{S}(D)$) называется верхняя грань множества площадей всех ступенчатых фигур, содержащихся в множестве D. То есть $\underline{S}(D) = \sup\{S(E)$, где E-ступенчатое множество $E \subset D\}$* *1.3. ▷ ▷*

Определение ◁ ◁ 1.4. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$-ограниченное множество. Верхней площадью множества D (обозначение $\overline{S}(D)$) называется нижняя грань множества ступенчатых фигур, содержащих в себе множество D. То есть $\overline{S}(D) = \inf\{S(F)$, где F-ступенчатое множество $F \supset D\}$* *1.4. ▷ ▷*

Замечание □ 1.1. Из этих определений следует, что для любого ограниченного множества всегда существует $\overline{S}(D)$, но не всегда существует $\underline{S}(D)$. *1.1. □*

Определение ◁ ◁ 1.5. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$-ограниченное множество. Если $\overline{S}(D) = \underline{S}(D)$ (в предположении, что $\underline{S}(D)$ существует), то множество D называется квадрируемым.* *1.5. ▷ ▷*

Определение ◁ ◁ 1.6. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$-квадрируемое множество. Тогда число $S(D) = \overline{S}(D) = \underline{S}(D)$ называется площадью множества D.* *1.6. ▷ ▷*

Замечание □ 1.2. Существуют квадрируемые множества из $\mathbb{R}^2$ не являющиеся квадрируемыми. *1.2. □*

Замечание $\square$ *1.3.* Простейшим примером квадрируемого множества (помимо тривиальных: прямоугольник, ступенчатые фигуры) является криволинейная трапеция.
ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!
Можно доказать, что определение площади криволинейной трапеции $S(D) = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$ согласуется с определением (**V**.1.6) *1.3.* $\square$

Замечание $\square$ *1.4.* В этом изложении (определения (**V**.1.2) – (**V**.1.6)) опущены некоторые детали:

1) Следовало бы доказать, что площадь ступенчатого множества не зависит от способа разбиения на составляющие прямоугольники.
2) Следовало бы доказать, что площадь, введённая в определении (**V**.1.6) обладает всеми теми свойствами площадей, введённых аксиоматически, в частности, что площадь фигуры равна сумме площадей её составляющих.

1.4. $\square$

Замечание $\square$ *1.5.* Введённое понятие площади может быть распространено на неограниченные множества следующим образом. Пусть $\mathbb{R}^2$-неограниченное множество.
ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!
1.5. $\square$
Рассмотрим множество:
$O_A = \{(x, y)|(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant A^2\}$
$D_A = D \cap O_A$
Определение $\lhd \lhd$ *1.7.* *Если выполнены условия:*

1) D_A-является квадрируемым для любого $A > A_0$

2) $\exists \lim\limits_{A\to\infty} S(D_A) = \lim\limits_{A\to\infty} S(A)$

то значения этого предела принято называть площадью (в несобственном смысле).
$S(D) = \lim\limits_{A\to\infty} S(D_A)$ *1.7.* $\rhd \rhd$

Пример ◀1.1. $D : \begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2} \\ y = 0 \end{cases}$

ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!
$S(D) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ **1.1.** ▶

§1.6. Понятие двойного интеграла.

Определение $\lhd \lhd$ *1.8.* *Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$. Диаметром множества (diam E) E называется верхняя грань множества расстояний между любыми двумя точками, принадлежащими E. То есть $diamE = \sup\{\rho(P, Q); P, Q \in E\}$*
Если множество ограниченно, то оно имеет диаметр. *1.8.* $\rhd \rhd$

Определение $\lhd \lhd$ *1.9.* *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$-квадрируемое множество. Разбиением $\tau = \tau(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ называется система квадрируемых множеств $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ таких, что*

1) $D = D_1 \cup D = D_2 \cup \dots \cup D_n$

2) При $i \neq k$ D_i *и* D_k *не имеют общих точек.*

1.9. $\triangleright\triangleright$

Определение $\triangleleft\triangleleft$ *1.10.* *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^2$*-квадрируемое множество.* $\tau = \tau(D_1, D_2, \dots, D_n)$ *некоторое разбиение множества* D*. Параметром разбиения* $\lambda(\tau)$ *называется максимум диаметра составляющих его множеств, то есть* $\lambda(\tau) = \max diam_{1 \leqslant i \leqslant n} D_i$ *1.10.* $\triangleright\triangleright$

Определение $\triangleleft\triangleleft$ *1.11.* *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^2$*-квадрируемое множество. Пусть* $\tau = \tau(D_1, D_2, \dots, D_n)$ *произвольное разбиение множества* D*. Пусть* $M_i(x_i; y_i)$ *произвольная точка из* D_i, $i = 1, 2, \dots, n$ *Пусть функция* $f(x, y) = f(M)$ $M = M(x, y)$ *-функция, определённая на множестве* D*. Тогда сумма* $\sigma = \Im_\tau(M_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)S(D_i)$ *называется интегральной суммой функции* $f(M)$ *на множестве* D *соответствующей данному разбиению* τ *и данному выбору точек* M_i*.* *1.11.* $\triangleright\triangleright$

Определение $\triangleleft\triangleleft$ *1.12.* *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^2$*-квадрируемое множество. Пусть* $\tau = \tau(D_1, D_2, \dots, D_n)$ *произвольное разбиение множества* D*. Пусть* $M_i(x_i; y_i) \in D_i$ *произвольная точка из* D_i, $i = 1, 2, \dots, n$ *Пусть функция* $f(x, y) = f(M)$ $M = M(x, y)$ *-функция, определённая на множестве* D*. Пусть сумма* $\sigma = \Im_\tau(M_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)S(D_i)$ *интегральная сумма функции* $f(M)$ *на множестве* D *соответствующая данному разбиению* τ *и данному выбору точек* M_i*.*
Тогда, если существует $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)S(D_i) = \Im$ *(не зависит от разбиения и выбора точек), то* $\Im$ *называется двойным интегралом функции* $f(M)$ *на множестве* D *(по множеству* D*) и обозначается*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_D \int f(M)dM$$

1.12. $\triangleright\triangleright$

Итак, $\int\limits_{+\infty} \int f(M)dM = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)S(D_i)$ (При условии что этот предел существует).
Замечание $\square$ *1.6.* Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой по множеству D. *1.6.* $\square$

В МОИХ ЛЕКЦИЯХ ПРОПУЩЕНА РАСШИФРОВКА НА ЯЗЫКЕ (ε, δ) определения (**V**.1.12). ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5-ШТРИХ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ ТАКЖЕ ПРОПУЩЕНЫ!!!

Пример ◀1.2. Пусть D-произвольное квадрируемое множество, $f(M) = C$ $\forall M \in D$
$\sigma = \Im_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)S(D_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} CS(D_i) = C\sum\limits_{i=1}^{n} S(D_i) = CS(D)$. Наша интегральная сумма является константой, не зависит от разбиения и выбора точек, следовательно существует $\Im = \int\limits_D \int CdM = \iint\limits_D Cdxdy = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} CS(D) = CS(D)$ Отсюда следует, что для любого квадрируемого множества D $\iint\limits_D Cdxdy = CS(D)$.
В частности отсюда вытекает, что площадь любого квадрируемого множества D $S(D) = \iint\limits_D dxdy$. **1.2.** ▶

§1.в. Свойства двойного интеграла.

Теорема ◁ 1.1: Необходимое условие интегрируемости.
Пусть функция $f(x,y)$ определена и интегрируема на квадрируемом множестве D. Тогда $f(M)$ ограничена на D. Иными словами, для интегрируемости функции $f(x,y)$ необходимо, но отнюдь не достаточно, чтобы она была ограничена на множестве D. *1.1. ▷*

Упражнение ◁ □ 1.1. Привести соответствующий пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \exists\delta\ \Upsilon\, x,\ y\ \gamma\ \iota\Upsilon\alpha\Omega\ \ \pi\Omega\xi. \\ 0, \Delta\alpha\ \Delta\delta\exists\theta\ \alpha\delta\epsilon\ \ \ \pi\Omega\xi\,\theta\ \delta\ \zeta\kappa\ \tau\theta. \end{cases}$$

ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!

1.1. □ ▷

Теорема ◁ 1.2: Достаточное условие интегрируемости.
Пусть $f(M) \in C(D)$, где $D \subset \mathbb{R}^2$-квадрируемое множество. Тогда $f(M)$ интегрируема на множестве D. *1.2. ▷*

Теорема ◁ 1.3: Линейность.
Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ определены и интегрируемы на квадрируемом множестве D. Тогда любая их линейная комбинация интегрируема на D и при этом: $\iint\limits_D [\alpha f(M) + \beta g(M) dM = \alpha \iint\limits_D f(M)dM + \beta \iint\limits_D g(M)dM$ *1.3. ▷*

Теорема ◁ 1.4: Аддитивность.
Пусть $D = E \cup F$, где

1) *E и F квадрирумые множества.*

2) *E и F не имеют общих внутренних точек.*

Пусть $f(M)$ интегрируема на E и F. Тогда $f(M)$ интегрируема на D и при этом $\iint\limits_D f(M)dM = \iint\limits_E f(M)dM + \iint\limits_F f(M)dM$ *1.4. ▷*

Теорема ◁ 1.5: Оценка двойного интеграла.
Пусть функция $f(M)$, $M(x,y)$ определена и интегрируема на квадрируемом множестве D (следовательно она ограничена на D, то есть существуют A и B такие, что $A \leqslant f(M) \leqslant B\ \forall M \in D$).
Тогда имеет место оценка: $AS(D) \leqslant \iint\limits_D f(M)dM \leqslant BS(D)$ *1.5. ▷*

*Доказательство □ ◁ **V**.1.5.* Пусть $\tau = \tau(D_1, D_2, \dots, D_n)$ произвольное разбиение множества D. $M_i \in D_i,\ i = 1, \dots, n$произвольная точка. Из оценки $A \leqslant f(M_i) \leqslant B$ следует, что $AS(D_i) \leqslant f(M_i)S(D_i) \leqslant BS(D_i)$.
Просуммируем эти неравенства:
$\sum\limits_{i=1}^{n} AS(D_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)S(D_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} BS(D_i)$
$AS(D) = A\sum\limits_{i=1}^{n} S(D_i) \leqslant \Im_\tau(M_i) \leqslant B\sum\limits_{i=1}^{n} S(D_i) = BS(D)$. Эта оценка имеет место для любого τ и для любой точки M_i. *Ч.т.д.* **V**.1.5 ▷ □.

Теорема ◁ 1.6: Теорема о среднем для интегрируемой функции.
Пусть функция $f(M)$ определена и интегрируема на квадрируемом множестве D (следовательно она ограничена, то есть существуют A и B такие, что имеет место $AS(D) \leqslant \iint\limits_D f(M)dM \leqslant BS(D)$.
Тогда существует $\mu \in [A, B]$ такая, что $\iint\limits_D f(M)dM = \mu S(D)$ 1.6. ▷

Доказательство □ ◁ ***V**.1.6.* Перепишем неравенство $AS(D) \leqslant \iint\limits_D f(M)dM \leqslant BS(D)$ в виде $A \leqslant \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(M)dM \leqslant B$, положим $\mu = \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(M)dM$, тогда $A \leqslant \mu \leqslant B$, $\iint\limits_D f(M)dM = \mu S(D)$ *Ч.т.д.* **V**.1.6 ▷ □.

Теорема ◁ 1.7: Теорема о среднем для непрерывной функции.
Пусть D-связный квадрируемый компакт и $f(M) \in C(D)$. Тогда существует $M_0 \in D$ такая, что $\iint\limits_D f(M)dM = f(M_0)S(D)$ 1.7. ▷

Доказательство □ ◁ ***V**.1.7.* Из условия теоремы следует, что существует $A = \min\limits_{M \in D} f(M)$ $B = \max\limits_{M \in D} f(M)$ $A < B$ (согласно теореме Вайерштрасса). Из (**V**.1.6) существует $\mu \in [A, B]$ такая, что $\iint\limits_D f(M)dM = \mu S(D)$. Согласно теореме Коши о промежуточном значении, что для любого $\mu \in [A, B]$ существует $M_\mu \in D$ такая, что $f(M_\mu) = \mu$. В частности для μ из формулы $\iint\limits_D f(M)dM = \mu S(D)$ существует $M_0 \in D$ такое, что $f(M_0) = \mu$. Подставляя μ туда, получаем доказательство. *Ч.т.д.* **V**.1.7 ▷ □.

В заключении этого паранрафа дадим геометрическую интерпретацию двойного интеграла.
Пусть $f(M)$, $M(x, y)$ определена и интегрируема на квадрируемом множестве D. Рассмотрим цилиндрический брус, в основании которого лдежит множество D. "Крышей" служит поверхность $z = f(x, y)$, образующие параллельны оси z.
Геометрической интерпретацией является объём этого цилиндрического тела, равный $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = V(T)$.
ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!

Замечание □ *1.7.* Отметим два обстоятельства:

1) Это определение согласуется со следующим фактом: если $f(M) = 1$, то $\iint\limits_D 1dxdy = S(D)$ $V(T) = S(D)\underbrace{H}_{=1} = S(D)$

2) Это определение объёма тела согласуется с общим определением объёма пространственной фигуры.

1.7. □

§1.г. Сведение двойного интеграла к повторному.

Теорема ◁ 1.8: Пусть $f(x, y) \in C(\Pi)$, где $\Pi = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\ a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$. Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \tag{1.1}$$

Интеграл, стоящий в правой части называется повторным. 1.8. ▷

Доказательство □ ◁ ***V**.1.8.* Двойной интеграл в левой части существует согласно теореме (**V**.1.7). (П квадрируемый связный компакт, а $f(x,y)$ непрерывна на нём, следовательно она интегрируема). Поскольку этот интеграл существует, то он может быть найден при помощи специально выбираемого разбиения и выбора точек. Разделим отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ на n равных частей. При этом прямоугольник П разобьётся на n^2 прямоугольников Π_{ij}

ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!

$\begin{cases} x_i = a + \frac{b-a}{n}, & i = 0,1,\dots,n \\ y_i = y + \frac{d-c}{n}, & j = 0,1,\dots,n \end{cases}$ точки деления.

$\Pi_{ij} = \{(x,y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},\ y_i \leqslant y \leqslant y_{i+1}\ i,j = 0,1,\dots,n\}$

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию $\Im(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy \in C_{[a,b]}$. На основании теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра следует, что $\Im(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \Im(x,y)dx = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \Im(x)dx = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \Im(\xi_i)x_{i+1} - x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \Im(\xi_i)\frac{b-a}{n}$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $i = 0,1,\dots,n$.

Рассмотрим $\Im(\xi_i) = \int\limits_c^b f(\xi_i,y)dy = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,y)dy = \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_{ij})(y_{j+1} - y_j) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_{ij})\frac{d-c}{n}$, где $\eta \in [y_j, y_{j+1}]$.

Подставим найденное выражение в предыдущую формулу:

$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_a^b \Im dx = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_{ij})\frac{b-a}{n}\frac{d-c}{n} = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_{ij})S(\Pi_{ij}) = \iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy$

Выражение, стоящее в правой части последней формулы одна из возможных интегральных сумм двойного интеграла $\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy$. Перейдём к пределу при $\lambda(\tau) \to_{n\to\infty} 0$. ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!

При $n \to \infty$ $\lambda \to 0$. $\lambda = \frac{1}{n}\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$ *Ч.т.д.* **V**.1.8 ▷ □.

Замечание □ *1.8.* В доказанной формуле переменные x и y входят симметричным образом и мы приходим к формуле:

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx \tag{1.2}$$

1.8. □

Замечание □ *1.9.* Из формул (1.1) и (1.2) следует формула

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx \tag{1.3}$$

Полностью совпадает с теоремой об интегрировании собственного,зависящего от параметра, интеграла по параметру.

1.9. $\square$

Для того, чтобы полученные результаты распространить на криволинейные трапеции введём определение:

Определение $\lhd\lhd$ *1.13.*

1) *Множество* $D = \{(x,y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leqslant x \leqslant b, \ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x) \quad \forall x \in [a,b], \ \alpha(x), \beta(x) \in C_{[a,b]}\}$ ***называется правильным множеством по отношению к оси** ox.*

2) *Множество* $D = \{(x,y)|(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad c \leqslant y \leqslant d, \ \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y) \quad \forall y \in [c,d], \ \alpha(y), \beta(y) \in C_{[c,d]}\}$ ***называется правильным множеством по отношению к оси** oy.*

ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!

1.13. $\rhd\rhd$

Теорема $\lhd$ *1.9:*

1) *Пусть D-правильное множество по отношению к оси ox, $f(x,y) \in C(D)$.*
Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \tag{1.4}$$

2) *Пусть D-правильное множество по отношению к оси oy, $f(x,y) \in C(D)$.*
Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \tag{1.5}$$

1.9. $\rhd$

Замечание $\square$ *1.10.* Эти интегралы существуют, так как всякое правильное множество представляет собой компакт. *1.10.* $\square$

Замечание $\square$ *1.11.* Как правило, множество в конкретных примерах, в котором берётся интервал является правильным как по отношению к оси ox, так и по отношению к оси oy. Поэтому возможна расстановка пределов и в том, ив другом виде. *1.11.* $\square$

Пример ◀1.3. ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!

$y = x^2 \quad y{+}x^3$ Множество ограничено кривыми. $f \in C(D)$ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x^3} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

Пример вычисления двойного интеграла.

Найдём двойной интеграл от произведения степенных функций по двумерному симплексу. $D = \begin{cases} x \geqslant 0, \ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 1 \end{cases}$

$\iint\limits_D x^{a-1}y^{b-1}dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} x^{a-1}y^{b-1}dy = \dfrac{1}{b}\int\limits_0^1 x^{a-1}y^b|_0^{1-x}dx = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^b dx = \dfrac{1}{b}\mathbf{B}(a, b+1) = \dfrac{1}{b}\dfrac{\mathbf{\Gamma}(a)\mathbf{\Gamma}(b+1)}{\mathbf{\Gamma}(a+b+1)} =$
$\dfrac{1}{b}\dfrac{\mathbf{\Gamma}(a)b\mathbf{\Gamma}(b)}{a+b\mathbf{\Gamma}(a+b)} \Rightarrow \iint\limits_D x^{a-1}y^{b-1}dxdy = \dfrac{\mathbf{\Gamma}(a)\mathbf{\Gamma}(b)}{(a+b)\mathbf{\Gamma}(a+b)}$ **1.3.** ▶

Замечание □ *1.12.* Теорема (**V**.1.9) гарантирует результат лишь при a и $b \geqslant 1$. Однако, при $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$, этот интеграл понимается как несобственный. *1.12.* □

§2. Замена переменной в двойном интеграле.

Пример ◀2.1. $|x|^\alpha + |y|^\alpha = 1 \quad \alpha > 0$
ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!
$S = 4\int\limits_0^1 (1-x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}dx = [t = x^\alpha \quad x = t^{\frac{1}{\alpha}} \quad dx = \frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}] = \frac{4}{\alpha}\int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\alpha}}t^{\frac{1}{\alpha}}dt = \frac{4}{\alpha}\mathbf{B}(\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\alpha}+1) = \frac{4}{\alpha}\dfrac{\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{\alpha})\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{\alpha}+1)}{\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}+1)} =$
$\frac{4}{\alpha}\dfrac{\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{\alpha})\frac{1}{\alpha}\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{\alpha})}{\frac{2}{\alpha}(\mathbf{\Gamma}(\frac{2}{\alpha}))} = \frac{2}{\alpha}\dfrac{\mathbf{\Gamma}^2(\frac{1}{\alpha})}{\mathbf{\Gamma}(\frac{2}{\alpha})}$
$\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{2}{\alpha}\frac{\alpha^2}{\alpha/2} = 4$
$\mathbf{\Gamma}(a) \sim_{a\to+0} \frac{1}{a}$ **2.1.** ▶

§2.a. Формула для элемента площади в криволинейных кооринатах.

ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!

1) Пусть пара функций

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \tag{2.1}$$

осуществляет взаимооднозначное отображение $D \leftrightarrow \Delta$, где $D \subset \mathbb{R}^2_{xy}$; $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, где $x(u, v)$, $y(u, v) \in C^{1,1}_{u,v}(\Delta)$

2) и при этом якобиан $\mathfrak{I}(u, v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall (u, v) \in \Delta$

Рассмотрим бесконечно малый прямоугольник $Q \subset \Delta$ со сторонами du и dv и с вершинами $Q_1(u, v)$; $Q_2(u+du, v)$; $Q_3(u+du, v+dv)$; $P_4(x(u, v+dv); y(u, v+dv))$. При отображении (2.1) $Q \to P \subset D$, где P-некоторый бесконечно малый криволинейный четырёхугольник с вершинами в точках $P_1\big(x(u, v); y(u, v)\big)$ $P_2\big(x(u+du, v); y(u+du, v)\big)$ $P_3\big(x(u+du, v+dv); y(u+du, v+dv)\big)$ $P_4\big(x(u, v+dv); y(u, v+dv)\big)$. Очевидно, что $S(Q) = dudv$. Требуется найти $S(P)$.

Итак, заменим криволинейный прямоугольник P на бесконечно близкий к нему P' с точностью до малых высшего порядка, по сравнению с du и dv в точках $P_1' = P_1(x,y)$ $x(u+du;v) = x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}du$ (получили при помощи линеаризации).
$P_2'(x + \frac{\partial x}{\partial u}du; y + \frac{\partial y}{\partial u}du)$
$P_3'(x + \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv; y + \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv)$
$P_4'(x + \frac{\partial x}{\partial v}dv; y + \frac{\partial y}{\partial v}dv)$
Отметим, что все эти величины вычисляются в точке (u,v).
Рассмотрим векторы $\overline{P_1'P_2'} = (\frac{\partial x}{\partial u}du; \frac{\partial y}{\partial u}du)$ $\overline{P_3'P_4'} = (\frac{\partial x}{\partial u}du; \frac{\partial x}{\partial u}du \Rightarrow \overline{P_1'P_2'} = \overline{P_3'P_4'} \Rightarrow P'$-параллелограмм, $\overline{P_1'P_4'} = (\frac{\partial x}{\partial v}dv; \frac{\partial y}{\partial v}dv)$

Так как площадь параллелограмма равна векторному произведению двух векторов, то $S(P') = \left|\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}du & \dfrac{\partial y}{\partial u}du \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}dv & \dfrac{\partial y}{\partial v}dv. \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{vmatrix}\right| dudv = |\Im(u,v)|dudv$
Итак, $S(P') = |\Im(u,v)|dudv$

$$S(P) \approx |\Im(u,v)|S(Q) \tag{2.2}$$

С точностью до бесконечно малых высшего порядка по сравнению с du и dv

§2.б. Теорема о замене переменных в двойном интеграле.

Лемма $\lhd \sqsubset p$ 2.1: Формула для площади квадрируемого множества в криволинейных координатах.

1) Пусть пара функций $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ *осуществляет взаимооднозначное отображение* $D \leftrightarrow \Delta$, *где* $D \subset \mathbb{R}^2_{xy}$; $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, *где* $x(u,v)$, $y(u,v) \in C^{1,1}_{u,v}(\Delta)$

2) и при этом якобиан $\Im(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall (u,v) \in \Delta$

Тогда имеет место формула

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_\Delta |\Im(u,v)|dudv \tag{2.3}$$

2.1 $\sqsupset \rhd$

Доказательство $\square \lhd$ **??.** ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!
Разложим множество Δ прямыми, параллельными координатным осям на бесконечно малые прямоугольники. Тогда D разобьётся на бесконечно малые криволинейные четырёхугольники.
$\iint\limits_D dxdy = S(D) = \sum\limits_i S(D_i) \approx \sum\limits_i |\Im(u_i;v_i)|S(\Delta_i)$.

При этом мы пренебрегаем членами высшего порядка малости при использовании (2.2) и "неправильными" элементами у границы множества. Можно доказать, что всё это есть o-малое от основного вклада. Тогда, в пределе следует формула (2.3) *Ч.т.д.* **??** $\rhd\square$.

Формула для площади связного квадрируемого компакта.
Пусть выполнены условия 1) и 2) леммы (**V**.2.1). Пусть также 3) Δ (автоматически и D) является связным компактом.
Применим к правой части формулы (2.3) теорему о среднем для непрерывной функции:
$\iint\limits_{\Delta} |\Im(u,v)|dudv = |\Im(\overline{u},\overline{v})|S(\Delta)$, где $(\overline{u},\overline{v}) \in \Delta \Rightarrow$

$$S(D) = |\Im(\overline{u},\overline{v})|S(\Delta) \tag{2.4}$$

где $(\overline{u},\overline{v}) \in \Delta$

Теорема $\lhd$ *2.1:*

1) *Пусть пара функций* $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ *осуществляет взаимооднозначное отображение между связными квадрируемыми компактами* D *и* Δ*, где* $x(u,v),\ y(u,v) \in C^{1,1}_{u,v}(\Delta)$
2) $|\Im(u,v)| \neq 0\ \forall (u,v) \in \Delta$
3) $f(x,y) \in C(D)$

Тогда имеет место формула:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f\big(x(u,v);y(u,v)\big|\Im(u,v)|dudv \tag{2.5}$$

2.1. $\rhd$

Доказательство $\square\lhd$ ***V**.2.1.* Так как оба интеграла в формуле (2.5) заведомо существуют (так как подинтегральные функции непрерывны) то наш двойной интеграл может быть найден с помощью специально выбранных промежуточных точек.
Пусть $\tau = \tau(D_1, D_2, \dots, D_n)$-произвольное разбиение множества D; $M_i(x_i;y_i) \in D_i$. Рассмотрим интегральную сумму $\sigma = \Im_\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)S(D_i)$.
В силу формул (2.1) разбиению τ соответствует $\tau' = \tau(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$
Из формулы (2.4) следует $S(D_i) = |\Im(\overline{u_i},\overline{v_i})|S(\Delta_i),\ i = 1,2,\dots \quad (\overline{u_i},\overline{v_i}) \in \Delta_i$
$\Rightarrow \sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)|\Im(\overline{u_i},\overline{v_i})|S(\Delta_i)$ *Ч.т.д.* **V**.2.1 $\rhd\square$.

Пример ◀2.2. Найти объём тела, ограниченный этой поверхностью.
$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = r^n$
ЗДЕСЬ РИСУНОК!!!
$V(n) = \iint\limits_{D} \sqrt[n]{1 - (\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n})}dxdy$
Перейдём к обобщённым эллиптическим интегралам

$V(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} V(n) = abc \qquad V_n = c\iint\limits_D \sqrt[n]{1-(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n})}dxdy = c\frac{2ab}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^1 r\cos^{\frac{2}{n}-1}\phi\sin^{\frac{2}{n}-1}\phi\sqrt[n]{1-r^n}d? = \frac{2abc}{n}\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2$

$\mathfrak{I}_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1}\phi\sin^{\frac{2}{n}-1}\phi d\phi = \frac{1}{2}\mathbf{B}(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{\Gamma}^2(\frac{1}{n})}{\mathbf{\Gamma}(\frac{2}{n})}$

$\mathfrak{I}_2 = \int\limits_0^1 r\sqrt[n]{1-r}dr = [r^n = t \;\; r = t^{\frac{1}{n}} \;\; dr = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt] = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{1-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{2}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}dt = \frac{1}{n}\mathbf{B}(\frac{2}{n},\frac{1}{n}+1) = \frac{1}{n}\frac{\mathbf{\Gamma}(\frac{2}{n})\frac{1}{n}\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{n})}{\frac{3}{n}\mathbf{\Gamma}(\frac{3}{n})}$

$V(n) = \frac{2abc}{n}\frac{2}{n}\frac{\mathbf{\Gamma}^2(\frac{1}{n})}{\mathbf{\Gamma}(\frac{2}{n})}\frac{1}{n}\frac{\mathbf{\Gamma}(\frac{2}{n})\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{n})\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}\mathbf{\Gamma}(\frac{3}{n})}$

$V(n) = \frac{abc}{3n^2}\frac{\mathbf{\Gamma}^3(\frac{1}{n})}{\mathbf{\Gamma}(\frac{3}{n})}$ **2.2.** ►

ГЛАВА **VI**

Криволинейные и поверхностные интегралы.

§1. Криволинейный интеграл первого рода.

§1.a. Основные определения.

Преамбула:пусть функции $x(t), y(t), z(t) \in C'_{[a;b]}$ и осуществляют взаимооднозначное отображение $[a;b]$ и кривой $L = \widetilde{AB} \subset \mathbb{R}^3_{x,y,z}$. $M = M(t) = M(x(t), y(t), z(t)) \in L, \forall t \in [a;b]$; $M(a) = A$; $M(b) = B$;

Напомним,что длина кривой $s(L)$ есть:

$$\int\limits_a^b \mid \overline{M}'(t) \mid dt = \int\limits_a^b \sqrt{(\dot{x})^2(t) + (\dot{y})^2(t) + (\dot{z})^2(t)}dt$$

Определение ◁ ◁ 1.1. (Разбиение):
Пусть:
1) $\tau = \{t_k\}_{i=0}^{i=n}$произвольное разбиение $[a;b]$;
2) $M_k = M(t_k)$;
Тогда: представление $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$, где $L_k = \widetilde{M_{k-1}M_k}$ называется разбиением кривой L,соответствующим данному разбиению $[a;b]$. Это разбиение также обозначается τ.
1.1. ▷ ▷

Определение ◁ ◁ 1.2. 2:
Пусть τ некоторое разбиение кривой L. Тогда число $\lambda(\tau) = \max s(L_k)$ называется параметром данного разбиения. 1.2. ▷ ▷

Определение ◁ ◁ 1.3. 3 (Интегральная сумма):
Пусть:
1) τ- произвольноеразбиение L;
2) $\bar{M} \in L_k, k = 1, 2, \dots, n$-произвольные промежуточныеточки;
3) функция $f(M) = f(x, y, z)$ определена на L.
Тогда сумма

$$I_\tau(\overline{M}_k = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{M}_k)s(L_k)$$

называется интегральной суммой по кривой L, соответствующей данному разбиению τ и данному выбору промежуточных точек $\overline{M}_k$. 1.3. $\triangleright\triangleright$

Определение $\triangleleft\triangleleft$ *1.4.* (Криволинейный интеграл первого рода):
Пусть :

1) *функция $f(M) = f(x, y, z)$ определена на L;*

2) *τ — произвольное разбиение L;*

3) *$M = M_k \in L_k$-промежуточные точки.*

Если

$$\exists \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \Im_\tau \overline{M}_k = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{M}_k)\cdot s(L_k) = \Im,$$

то этот предел называется криволинейным интегралом функции $f(M)$ по кривой L и обозначается $I = \int\limits_L f(M)ds = \int\limits_L f(x, y, z)ds$. 1.4. $\triangleright\triangleright$

Упражнение $\triangleleft\square$ *1.1.* Сформулировать определение на языке $\varepsilon - \delta$. *1.1.* $\square\triangleright$

§1.б. Основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

Пусть функции $x(t), y(t), z(t)$ осуществляют взаимнооднозначное отображение $[a; b]$ в $L \in \mathbb{R}^3$ так, что $M = M(t) \in L \forall t \in [a; b]$. $M(a) = A; M(b) = B$. Тогда имеет место теорема:

1. Если $f(M) = f(x, y, z)$ определена на L ,интегрируема по L в смысле Определения 4,то она ограничена на L . Обратное вообще говоря неверно.

Напоминание: Непрерывность по множеству.

а)функция $f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0 \in L$ по кривой L, если $\forall\ \epsilon > 0 \exists\ \delta > 0$:

$$\text{из} \rho(M_0M) < \delta\ , \quad M \in L. \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \epsilon$$

.

б)$f(M)$,определенная наL, называется непрерывной по $L(f(M) \in C(L))$, если она непрерывна по L по каждой ее точке (в смысле определения а)).

2. Если $f(M) \in C(L)$, то $f(M)$ интегрируема по L в смысле Определения 4.

3. Если $f(M)$ и $g(M)$ определены и интегрируемы по L ,то любая их линейная комбинация $(\alpha f(M) + \beta g(M))$ интегрируема по L и

$$\int\limits_L [\alpha f(M) + \beta g(M)]ds = \alpha \int\limits_L f(M)ds + \beta \int\limits_L g(M)ds$$

.

4. Пусть: 1)L = ĂB=ĂC∪ČB (ĂC ∪ ČB= C); 2)$f(M)$ определена и интегрируема на ĂC и ČB. Тогда:$f(M)$ интегрируема на ĂBи при этом:

$$\int\limits_{AB} f(M)\,ds = \int\limits_{AC} f(M)ds + \int\limits_{CB} f(M)\,ds$$

.

5. $\int\limits_L Cds = Cs(L) \Rightarrow s(L) = \int\limits_L ds.$

Замечание: Остальные свойства(свойства с оценками и теорема о среднем)автоматически вытекают из свойств обычного определенного интеграла с учетом теоремы о сведениикратного интеграла второго рода к определенному интегралу.

§1.в. Сведение криволинейного интеграла 1-го рода к определённому интегралу

.

Теорема $\triangleleft$ *1.1:* Теорема о сведении криволинейного интеграла. *Пусть:*

1)$x(t), y(t), z(t) \in C'_{[a;b]}$ осуществляют взаимнооднозначное отображение $[a;b]$ и L, при этом $M = M(t) = M(x(t), y(t), z(t)) \in L \forall\ t \in [a;b]; M(a) = A; M(b) = B.$

2)функция $f(M) = f(x,y,z) \in C(L)$ в смысле определения предыдущего пункта.Тогда имеет место формула (*):

$$(*) \int\limits_L f(M)ds = \int\limits_L f(x,y,z)ds = \int\limits_a^b f(M(t))|\overline{M}(t)|dt = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$$

. *1.1.* $\triangleright$

Доказательство:

Пусть τ- произвольное разбиение;$L = L_1 \cup L_2, \ldots, \cup L_n$; $L_k = M_{k-1} \cdot Mk$; $\overline{M}_k \in L_k, k = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим интегральную сумму для кратного интеграла :

$$\Im_\tau(\overline{M}_k) = \sum_{k=1}^n f(\overline{M}_k) \cdot s(L_k)$$

, т.к. этот интеграл заведомо существует,то мы можем его найти с помощью специального выбора точек $\overline{M}_k$.

$$s(L_k) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |\overline{M}'(\overline{t_k})|dt = [(*)]$$

$$\overline{M}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)$$

$$[(*)] = |\overline{M}'(\bar{t}_k)| \cdot (t_k - t_{k-1}) = |\overline{M}'(overline t_k)| \cdot \vartriangle t_k$$

,где $\overline{t_k} \in [t_{k-1}; t_k], k = 1, 2, \ldots, n$ Положим $\overline{M}_k = M(\bar{t}_k)$.Очевидно, что $M(\bar{t}_k) \in L - k$.

Получим:

$$\Im_\tau(\overline{M_k}) = \sum_{k=1}^n f(M(\overline{f}_k)) \cdot |\overline{M}'(\bar{t}_k)| \cdot \vartriangle t_k \to$$

$$(**)\Im_k(\overline{M}_k) = \sum_{k=1}^{n} f(x(t_k), y(t_k), z(t_k)) \cdot \sqrt{(x'(\bar{t}_k))^2 + (y'(\bar{t}_k))^2 + (z'(\bar{t}_k))^2}\delta t_k$$

Очевидно,что в правой части стоит одна из возможных интегральных сумм для интеграла, стоящего в правой части формулы (*).Переходя к пределу в равенстве при $\lambda(\tau) \longrightarrow 0 \to (*)$.

Теорема доказана. ■

Замечание □ *1.1.* : В случае, если L является плоской (xOy) ,то формула $(*)$ приобретает вид:

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \qquad (*')$$

. *1.1.* □

Замечание □ *1.2.* : В случае , если кривая L расположена в xOy и задана явным уравнением $y = y(x); a \leqslant x \leqslant b$, то формула $(*)$ принимает вид :

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx \qquad (*'')$$

.

1.2. □

Замечание □ *1.3.* : Пусть выполнены условия замечания 2;

$$y'(x) = \tan\alpha(x) \longrightarrow \sqrt{1 + (y'(x))^2} = \frac{1}{|\cos\alpha(x)|} \longrightarrow (***) :$$

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\frac{dx}{|\cos\alpha(x)|}$$

.

1.3. □

Следствие 1 из **??**.

Длина $L = \int\limits_L ds =$ (при условии , что L удовлетворяет условиям замечания 2) $= \int\limits_a^b \frac{dx}{|\cos\alpha(x)|}$.

1 из **??**.

Замечание □ *1.4.* : Из определения 4 следует:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(M)\,ds\,.$$

Таким образом криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления обхода L. *1.4.* □

§1.г. Вычисление некоторых криволинейных интегралов 1-го рода

1)

$$\int\limits_L x^\alpha \cdot y^\beta ds \qquad \text{, где } L = \left\{ \begin{matrix} x^2+y^2=1 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t; \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$$

, получим:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^\alpha t \cdot \sin^\beta t \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = 1/2 \cdot \mathbf{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}; \frac{\beta+1}{2}\right), \qquad \begin{cases} \alpha > -1 \\ \beta > -1. \end{cases}$$

2)

$$\int\limits_L \sqrt[n]{x^2+y^2} ds, \qquad \text{где} \quad L = \left\{ (x,y) \,:\, x^2+y^2 = 2ax \,,\ a > 0. \right\}.$$

§2. Криволинейный интеграл второго рода.

§2.а. Механическое рассмотрение.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases}$$

$M = M(x(t), y(t), z(t))$
$\int\limits_l (\vec{F}, d\vec{r}) = \int (Pdx + Qdy + Rdz), \qquad dr = (dx, dy, dz)$

Замечание □ 2.1. :из этого определения следует, что криволинейный интеграл второго рода, в отличие от интеграла первого рода, который не зависел от направления обхода кривой L, меняет знак на противоположный при изменении направления обхода:

$$\int\limits_{\widetilde{BA}} (\vec{F}, d\vec{r}) = -\int\limits_{\widetilde{AB}} (\vec{F}, \vec{r})$$

. *2.1.* □

§2.б. Понятие криволинейного интеграла второго рода.

Преамбула:Пусть :

1) функции $x(t), y(t) \in C'_{[a;b]}$ осуществляют взаимнооднозначное отображение $[a;b] \subset R_t$ и кривая $L = \widetilde{AB} \subset R^2_{x,y}$;

2)$M = M(t) = M(x(t), y(t)) \in L \forall t \in [a;b]$; $\qquad M(a) = A, M(b) = B$;

3)$\tau = \{t_k\}_0^n$ произвольное разбиение $[a;b]$; $\qquad \lambda(\tau) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} l_k$;

4)$M(t_k) = M_k, L_k = \widetilde{M_{k-1}M_k}, k = 1, 2, \ldots, n$; $\qquad L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$ -разбиение кривой L;

5) $\overline{M}_k \in L_k$;

6)функция $f(M) = f(x, y)$ определена на L.

Определение ◁ ◁ 2.1. *(Интегральная сумма):Сумма*

$$!!!_x = \Im_\tau(\overline{M}_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{M}_k) \cdot \triangle\, x_k$$

, где $\triangle\, x_k = x_k - x_{k-1}$, $x_k = x(t_k)$, называется интегральной суммой $f(M)$ по кривой L в направлении оси Ox, соответствующей данному разбиению τ и данному выбору промежуточных точек $\overline{M}_k$.

2.1. ▷ ▷

Замечание □ 2.2. :Аналогично определяется интегральная сумма функции f по кривой L в направлении оси Oy.

$$!!!!_y = \Im_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{M}_k) \cdot \triangle\, y_k, \qquad \triangle\, y_k = y_k - y_{k-1}, \qquad y_k = y(t_k)$$

. *2.2.* $\square$

Замечание $\square$ *2.3.* :Из этого следует, что сумма меняет знак на противоположный при изменении направления обхода кривой . *2.3.* $\square$

Определение $\triangleleft$ $\triangleleft$ *2.2.* *:Если*

$$\exists \lim_{\lambda(\tau)\to 0} !!!_x = \lim_{\lambda(\tau)\ to0} \Im_k(\overline{M}_k) = \Im_x$$

, не зависящий от ....,то $f(M)$ называется интегрируемой по L в направлении оси Ox, а число $\Im_x$ называется криволинейным интегралом второго рода функции $f(M)$ по L в направлении оси Ox и обозначается:

$$\Im_x = \int\limits_L f(M)dx = \int\limits_L f(x,y)dx$$

. *2.2.* $\triangleright$ $\triangleright$

Замечание $\square$ *2.4.* :Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода функции $f(M)$ по кривой L в направлении оси Oy:

$$\Im_y = \int\limits_L f(M)dy = \int\limits_L f(x,y)dy = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} !!!_y$$

. *2.4.* $\square$

Замечание $\square$ *2.5.* :Пусть на кривой L определены две функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, причем $P(x,y)$ интегрируема по L в направлении оси Ox, а $Q(x,y)$ - в направлении оси Oy.Тогда:

$$\Im = \int\limits_L P(x,y)dx + \int\limits_L Q(x,y)dy = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \text{– интеграл общего вида.}$$

2.5. $\square$

Упражнение $\triangleleft$ $\square$ *2.1.* :Распространить на 3-х мерный случай.
2.1. $\square$ $\triangleright$

§2.в. Свойства криволинейного интеграла второго рода.

Преамбула:(см. предыдущий подпункт...)
Имеют место следующие свойства:

1.Если функция $f(M) = f(x,y)$ определена и интегрируема по кривой L в направлении оси Ox (Oy), то $f(M)$ ограничена на L.Обратное утверждение вообще говоря неверно.

2.Если $f(x,y) \in C(L)$, то $f(x,y)$ интегрируема по кривой L , как в направлении оси Ox, так и в направлении оси Oy.

3.Имеет место линейность (самостоятельно).

4.Аддитивность(самостоятельно).

5.

$$\int\limits_L Cdx = C \cdot \text{ Пр}_x L; \int\limits_L Cdy = C \cdot \text{ Пр}_x L.$$

$$!!!!!_x = C \cdot \sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = C(\triangle x_1 + \ldots + \triangle x_n) = C \cdot (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_n - x_{n-1}) =$$

$$= C \cdot (x_n - x_0) = C \cdot (x(t_n) - x(t_0)) = C \cdot (x(b) - x(a)) = C \cdot \text{Пр}_x L.$$

6.Пусть функция $f(x,y)$ определена и интегрируема по кривой $L = \widetilde{AB}$ в направлении оси Ox.Тогда:$f(x,y)$ интегрируема по кривой $L = \widetilde{BA}$ в направлении оси Ox и при этом :

$$\int\limits_{BA} f(x,y)dx = -\int\limits_{AB} f(x,y)dx$$

$$\int\limits_{-L} f(x,y)dx = -\int\limits_{L} f(x,y)dx.$$

7.Пусть кривая L представляет собой вертикальный отрезок, а функция $f(x,y)$ определена и интегрируема по L.Тогда :

$$\int\limits_L f(x,y)dx = 0.$$

Если L - горизонтальный отрезок, то :

$$\int\limits_L f(x,y)dy = 0.$$

§2.г. Сведение криволинейного интеграла 2-го рода к определенному интегралу .

Теорема $\triangleleft$ *2.1:* (о сведении криволинейного интеграла второго рода к определенному интегралу)*:Пусть:*

1)$x = x(t), y = y(t) \in C'_{[a;b]}$ *осуществляют взаимооднозначное отображение* L *и* $[a;b]$,$M = M(t) = M(x(t), y(t)) \in L \; \forall \; t \; \in [a;b]$,$M(a) = A, M(b) = B;$

2)$f(x,y) \in \; C(L).$

Тогда: имеют место формулы :

$$\int\limits_L f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \cdot x' \; dt \qquad (1)$$

,

$$\int\limits_{L} f(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} f(x(t),y(t)) \cdot y^{'}\, dt \qquad (2).$$

_2.1._ $\triangleright$

Доказательство $\square \triangleleft$ ***VI**.2.1.* Докажем формулу (1):

Пусть τ-произвольное разбиение $\tau = \{t_k\}_{k=0}^{k=n}$, $M_k = M(t_k),\ L_k = \widetilde{M_{k-1}M_k},\ \overline{M}_k = M(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k)),\ \overline{M}_k \in L_k,\ \bar{t}_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

$$!!!_x = \Im_\tau(\overline{M}_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{M}_k) \cdot \triangle\, x_k = (\maltese)$$

$(\triangle\, x_k = x_k - x_{k-1} = x(t_k) - x(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x^{'}(t)dt)$.

$$(\maltese) \qquad = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{M}_k) \cdot \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x^{'}(t)dt.$$

$$(*) \qquad !!!!_x = \sum_{k=1}^{n} f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k)) \cdot \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x^{'}(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k)) \cdot x^{'}dt.$$

Интеграл, стоящий в правой части :

$$\Im = \int\limits_{a}^{b} f(x(t),y(t)) \cdot x^{'}(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(x(t),y(t)) \cdot x^{'}(t)dt;$$

$$|!!!_x - \Im| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k)) - f(x(t),y(t))| \cdot |x^{'}(t)|dt \qquad (***)$$

Пусть:
1) ϵ - любое число больше 0,
2) $M = \max\limits_{[a;b]} |x^{'}(t)|$.

Тогда: по числу $\frac{\varepsilon}{M(b-a)} > 0 \ \exists\ \delta > 0$ (из определения равномерной непрерывности $f(x(t),y(t))$на$[a;b]$) такое, что: из $\lambda^{'} = \max\limits_{1 \leqslant t \leqslant n} \triangle\, t < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k)) - f(x(t),y(t))| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \Rightarrow |!!_x\ \Im| < \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot Mdt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}} t_k dt = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\triangle\, t_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon \Rightarrow\ \exists \lim_{\lambda(\tau)\to 0} !!!_x = \Im; \quad \lambda^{'} \to 0 \ \Leftrightarrow \lambda(\tau)\to 0 \Rightarrow$$

1) $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} !!!_x = \Im$

2) $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} !!!_x = \int\limits_L f(x,y)dx$

Из этого следует (по теореме о единственности предела):

$$\int\limits_L f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\cdot x^{'}(t)dt.$$

Ч.т.д. **VI**.2.1 $\triangleright\Box$.

Замечание $\Box$ *2.6.* : формула (2) доказывается аналогично. *2.6.* $\Box$

Замечание $\Box$ *2.7.* : Пусть: $P(x,y)$и$Q(x,y)\in C(L)$, тогда справедлива формула (3):

$$(3) \qquad \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b [P(x(t),y(t))\cdot x^{'} + Q(x(t),y(t))\cdot y^{'}]dt;$$

2.7. $\Box$

§2.д. Связь между криволинейными интегралами 2-го и 1-го рода.

Пусть выполнены все условия теорем о сведении криволинейных интегралов первого и второго родов к определенному интегралу.Тогда имеют место следующие формулы :

$$(1) \qquad \int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt;$$

$$(2) \qquad \int\limits_L f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\cdot dt = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\cdot \frac{x^{'}(t)}{\sqrt{(x'(t))^2(y'(t))^2}}\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

$\overline{k}^{'}(t) = \frac{x^{'}(t)}{\sqrt{(x^{'})^2+(y^{'})^2}};\frac{y^{'}(t)}{\sqrt{(x^{'}(t))^2+(y^{'}(t))^2}} = (\cos\alpha,\sin\alpha) = (\cos\alpha,\cos\beta;)$

$$(2^{'}) \qquad \int\limits_L f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\cdot\cos\alpha\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt = \int\limits_L f(x,y)\cdot\cos\alpha ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3) \qquad \int\limits_L f(x,y)dx = \int\limits_L f(x,y)\cdot\cos\alpha ds.$$

Аналогично находим (4):

$$\int\limits_L f(x,y)dy = \int\limits_L f(x,y)\cdot\cos\beta ds. \tag{4}$$

Замечание $\square$ *2.8.* : Из формул (3) и (4) $\Rightarrow$ (5):

$$\int\limits_L p(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L [P(x,y)\cdot\cos\alpha + Q(x,y)\cdot\beta]ds. \tag{5}$$

2.8. $\square$

§3. Формула Грина (,открытая Эйлером задолго до рождения Грина).

§3.a. Вывод формулы Грина.

Пусть: $P(x,y), \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \in C(G)$, где G-правильное множество относительно оси Ox:
$G = \{(x,y) | a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, где $y_1(x,\ y_2(x) \in C_{[a;b]}.)$
Рассмотрим: $\iint\limits_G (-\frac{\partial P}{\partial y}) dxdy =$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} (-\frac{\partial P}{\partial y}) dy = \int\limits_a^b [P(x,y)|_{y_1(x)}^{y_2(x)}] dx = \int\limits_a^b P(x, y_1(x)) dx - \int\limits_a^b P(x, y_2(x)) dx =$$

$$= \int\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y)\, dx + \int\limits_{\widetilde{BC}} P(x,y)\, dx + \int\limits_{\widetilde{CD}} P(x,y)\, dx + \int\limits_{\widetilde{DA}} P(x,y) dx = \text{аддитивность} = \int\limits_L P(x,y) dx$$

, где $L = \widetilde{AB} \cup \widetilde{BC} \cup \widetilde{CD} \cup \widetilde{DA}$.

$$(1) \qquad \iint\limits_G (-\frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint\limits_L p(x,y) dx$$

. Аналогично доказывается формула (2).

$$\iint\limits_G (\frac{\partial Q}{\partial x}) dxdy = \oint\limits_L Q(x,y) dy$$

, где G-правильное множество относительно оси Оу; $Q,\ \frac{\partial P}{\partial x} \in C(G)$.

Теорема ◁ 3.1: (о формуле Грина):
Пусть:
1)$G \in \mathbb{R}^2$-множество, правильное относительное осей Ox, Oy.
2)функции $P,\ \frac{\partial P}{\partial y},\ Q,\ \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(G)$.
Тогда: имеет место формула (3):

$$(3) \qquad \oint\limits_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint\limits_G (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

3.1. ▷

Пример:

$$\int\limits_L (x^{1999} - y) dx + (x + y^{2000}) dy = \iint\limits_G (1+1) dxdy = 2S(G) = 2\pi ab \qquad \left\{ L = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Следствие 1 из **VI**.3.1. *(Выражение площади при помощи криволинейного интеграла второго рода.)*
Пусть: G - множество, удовлетворяющее условиям Теоремы 1 ;

L - граница этого множества, пробегаемая в положительном направлении.

Тогда : $S(G)$ может быть бесконечным множеством способов записана при помощи криволинейного интеграла. Для этого достаточно подобрать функции P, Q, удовлетворяющие условию :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$$

$$S(G) = \oint\limits_L xdy = -\oint\limits_L ydx = 1/2 \oint\limits_L xdy - ydx = \iint\limits_G dxdy = S(G).$$

1 из **VI**.3.1.

Пример: $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 1, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, \ (a, b, n > 0)$; Рассмотрим эту площадь как 1/4 площади этой кривой.

$$\frac{|x|^n}{a^n} + \frac{|y|^n}{b^n} = 1$$

$$S = 1/4 \cdot 1/2 \oint\limits_L xdy - ydx = (*)$$

$$\begin{cases} x = a(\cos)^{\frac{2}{n}} t \\ y = b(\sin)^{\frac{2}{n}} t. \end{cases}$$

$$1/4 \cdot 1/2 (later \dots)$$

Замечание □ *3.1.* Формула Грина может быть доказана при помощи Теоремы 2. *3.1.* □

Теорема ◁ *3.2: Пусть функции* $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \in C(G^{'})$, *где* $G^{'} = G \cup L$, *где* G *- область, ограниченная кусочногладкой жардановой кривой.*

Тогда: справедлива формула :

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G (\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy.$$

3.2. ▷

§3.б. Криволинейные интегралы второго рода, не зависящие от пути интегрирования .

Предуведомление: все кривые предполагаются кусочно-гладкими и жордановыми.

Определение ◁◁ *3.1.* (односвязной области)*:*
Область, границы которой состоят из одной кусочногладкой жардановой кривой называется односвязной областью.

($x^2+y^2<4$- односвязная область, $1/4<x^2+y^2<4$-не односвязная, $0<x^2+y^2<4$- не односвязная).
3.1. $\triangleright\triangleright$

Теорема $\triangleleft$ *3.3: (о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования)("Тройная теорема").*
Пусть : функции $P(x,y),Q(x,y)\in C(G)$, где G -односвязная область.
Тогда : эквивалентны следующие 3 условия :
1. $\oint\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=0$ *– для любого замкнутого контура* $\gamma\in G$
2. $\int\limits_a^b Pdx+Qdy$ *не зависит от кривой, соединяющей точки a и b, а зависит только от положения точек a и b.*
3. *$Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом в G,т.е. $\exists\, U=U(x,y)$, определенная и интегрируемая в области G и такая, что $dU=Pdx+Qdy$.*
3.3. $\triangleright$

Доказательство $\square\triangleleft$ ***VI**.3.3.* 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1. (схема доказательства)
1)1. $\Rightarrow$ 2. Дано: $\oint\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=0,\quad \gamma\subset G$;

Доказать : $\int\limits_a^b Pdx+Qdy$ не зависит от кривой $\widetilde{ab}$

Рассмотрим контур $\gamma=(\widetilde{AB})_1\cup(\widetilde{BA})_2$. Тогда: $0=\oint\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=$

$$=\int\limits_{(\widetilde{AB})_1}\dots+\int\limits_{(\widetilde{BA})_2}\dots=\int\limits_{(\widetilde{AB})_1}\dots-\int\limits_{(\widetilde{AB})_2}\dots=\int\limits_{(\widetilde{AB})_1}Pdx+Qdy=\int\limits_{(\widetilde{AB})_2}P\,dx+Q\,dy$$

,т.е. выполнено условие 2.

2)2. $\Rightarrow$ 3. Дано: интеграл не зависит от пути интегрирования $\Rightarrow$ определена однозначная функция $U=U(x,y)=\int\limits_{\widetilde{M_0M}}P\,dx+Q\,dy$. Докажем, что :

1) U является дифференцируемой в G;
2) $dU=Pdx+Qdy$.

$$U(x+h,y)-U(x,y)=\int\limits_{\widetilde{M_0M_h}}Pdx+Qdy-\int\limits_{\widetilde{M_0M}}Pdx+Qdy=\int\limits_{\widetilde{MM_h}}Pdx+Qdy=\int\limits_{\widetilde{MM_h}}Pdx+\int\limits_{\widetilde{MM_h}}Qdy=$$

$$=\left\{\int\limits_{\widetilde{MM_h}}Qdy\Rightarrow 0 \text{ т.к. } [MM_h]\parallel Ox\right\}=\int\limits_{\widetilde{MM_h}}P(x,y)\,dx=\int\limits_x^{x+h}P(t,y)\,dt=$$

$$=\ \text{(согласно теореме о среднем для непрерывной функции)}\ \ P(x+\theta h,y)\cdot h,(0<\theta<1)\Rightarrow$$

$\Rightarrow\frac{U(x+h,y)+U(x,y)}{h}=P(x+\theta h,y)$.

Переходя к : $\lim\limits_{h\to 0} P(x+\theta h, y) = P(x,y)$ получаем, что $\exists\ \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$.

Аналогично доказывается существование $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.

Из непрерывности P и $Q \Rightarrow$ непрерывность $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow$ дифференцируемость $U(x,y)$:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot dy = Pdx + Qdy$$

.

Лемма: Пусть $U = U(x,y)$ дифференцируема в области G. $dU = Pdx + Qdy$

Покажем, что для любых точек A и B, принадлежащим G справедливо равенство:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$$

. Пусть L -кривая, $L : \begin{Bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t). \end{Bmatrix}$

Рассмотрим $U(t) = U(x(t), y(t))$; $U^{'(t)} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot x^{'}(t) + \frac{@U}{@y}\cdot y^{'}(t) =$ $(P = \frac{\partial U}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$; $a \leqslant t \leqslant b$, $A = (x(a), y(a))$, $B = (x(b), y(b))$) $= P(x(t), y(t))\cdot x^{'}(t) + Q(x(t), y(t))\cdot y^{'}(t)$.

Рассмотрим $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy =$ (согласно теореме о сведении криволинейного интеграла второго рода к определенному интегралу $= \int\limits_a^b [P(x(t), y(t))\cdot x^{'}(t) + Q(x(t), y(t))\cdot y^{'}(t)]dt = \int\limits_a^b U^{'}(t) = U(b) - U(a) = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = U(B) - U(A)$

3)3. $\Rightarrow$ 1. Дано: условие 3. Доказать - первое условие .

Пусть :

1)$\gamma \in G$ - произвольный замкнутый контур,

2)$A \in \gamma$,

3) $B = A$;

Тогда:

$$\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \oint\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A) = 0$$

.

Ч.т.д. **VI**.3.3 $\triangleright \square$.

Теорема $\triangleleft$ 3.4: (Критерий независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.)("Четвертичная теорема".)

Пусть: функции $P(x,y), Q(x,y), \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \in G$, где G односвязная область.

Тогда:каждое из условий теоремы 1 эквивалентно условию 4:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall т.(x,y) \in G$$

3.4. $\triangleright$

Доказательство $\square \triangleleft$ ***VI**.3.4.* Докажем: 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 1.

1)3. $\Rightarrow$ 4. Дано: $\exists$ дифференцируемая в G функция $U(x,y)$ такая, что : $\partial U = Pdx + Qdy = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y). \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \text{непрерывна} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \text{непрерывна.} \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ – непрерывны $\Rightarrow$ (согласно теореме Шварца о вторых смешанных производных) $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

2)4. $\Rightarrow$ 1.

Пусть $\gamma \subset G$- произвольный замкнутый контур.Рассмотрим $\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = (*)$

Пусть D -внутренность контура γ:

$$(*) = \iint\limits_{D} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0 \quad \text{согласно условию 4}$$

. *Ч.т.д.* **VI**.3.4 $\triangleright \square$.

Замечание $\square$ *3.2.* : Условие односвязности G в теореме1 и теореме2 существенно. *3.2.* $\square$

Пример:
$G = 1/4 < x^2 + y^2 < 4$, $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, $L = x^2 + y^2 = 1 \in G$, условие 4 выполнено.
С одной стороны:

$$\begin{matrix} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{matrix} \quad \forall \text{ т.}(x,y) \in G$$

С другой стороны: $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = (*) \begin{cases} x = cost \\ y = sint. \end{cases} \quad (*) = \int\limits_0^2 \pi \ldots = 2\pi \neq 0 -$условие односвязности существенно.

Замечание $\square$ *3.3.* Тем не менее условие односвязности области G отнюдь не является необходимым. *3.3.* $\square$

Пример: Область G и L берем такие же:

$$P = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}, \quad Q = \frac{y}{(x^2+y^2)^2};$$

Наш критерий выполняется для этих функций, но $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$

§4. Площадь поверхности.

§4.a. Параметрически заданная поверхность.

Определение $\lhd\lhd$ *4.1.*
Пусть функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C(D)$ *осуществляют взаимооднозначное отображение* $(*) D \leftrightarrow S$, *где* $D \subset R^2_{u,v}$, $S \subset R^3_{x,y,z}$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v). \end{cases} \qquad (*)$$

Тогда говорят, что поверхность S *задана уравнениями* $(*)$. *4.1.* $\rhd\rhd$

Пример:

$$\begin{cases} x = R\cos u \sin v \\ y = R\sin u \cos v \\ z = R\sin v. \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant v \leqslant \pi/2 \end{matrix}$$

Замечание $\square$ *4.1.* В дальнейшем будет предполагаться, что функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^{1,1}_{u,v}(D)$. *4.1.* $\square$

Замечание $\square$ *4.2.* Рассмотрим матрицу Якоби отображения $(*)$:

$$[\mathfrak{J}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{bmatrix}.$$

Из теории неявных функций следует, что дла того, чтобы отображение $(*)$ было взаимнооднозначным ,чтобы ранг матрицы Якоби был равен 2:

$$\operatorname{rank}[\mathfrak{J}] = 2 \Rightarrow D \leftrightarrow S$$

Рассмотрим миноры матрицы Якоби:

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{vmatrix}; \ B = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{vmatrix}; \ C \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{vmatrix}.$$

$\operatorname{rank}[\mathfrak{J}] = 2 \Rightarrow (**) A^2 + B^2 + C^2 > 0 \quad \forall (u,v) \quad \in D$

В дальнейшем будем предполагать, что $(**)$ выполнено. *4.2.* $\square$

Замечание $\square$ *4.3.* Точка (u_0, v_0), в которой $A = B = C = 0$ называется особой точкой поверхности S. Будем рассматривать поверхности без особых точек. *4.3.* $\square$

Замечание $\square$ *4.4.* Тривиальным частным случаем параметрически заданной поверхности является явно заданная поверхность $z = z(x,y)$; $\quad z(x,y) \in C^{1,1}_{x,y}(D)$,

$$[\mathfrak{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y}. \end{bmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1. \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

, т.е. любая явно заданная поверхность не содержит особых точек. *4.4.* $\square$

§4.б. Координаты вектора поверхности. Касательная плоскость.

Пусть S задана уравнениями $(*)$, где функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^{1,1}_{u,v}(D)$ и выполняется условие $(**)$. *Определение* $\lhd \lhd$ *4.2.* *(Радиус-вектор поверхности):*

Пусть : $M = M(u,v) = M(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S$ *-произвольная точка.*

Тогда: вектор $R = R(u,v) = \vec{OM} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$*-называется радиусом-вектором поверхности.* *4.2.* $\rhd \rhd$

Определение $\lhd \lhd$ *4.3.* *Линии на поверхности S, соответствующие (в силу отображения* $(*)$*) прямым* $u = c, v = c$ *называются координатными линиями поверхности.* *4.3.* $\rhd \rhd$

Замечание $\square$ *4.5.* Ввиду этого u и v принято называть криволинейными координатами. *4.5.* $\square$

Упражнение $\lhd \square$ *4.1.* остроить координатные линии сферы. *4.1.* $\square \rhd$

Определение $\lhd \lhd$ *4.4.* *Прямая называется касательной к S в данное её точке, если эта прямая в данной точке касается некоторой кривой, лежащей в S.* *4.4.* $\rhd \rhd$

Пусть:

$$\begin{cases} U + U(t) \\ V = V(t). \end{cases} \qquad t \in [t_1, t_2] -$$

произвольная гладкая кривая, принадлежащая S.Рассмотрим вектор $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) =$
$= (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{dv}{dt};$

Введем в рассмотрение эти векторы:

$$\vec{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$\vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

Тогда имеет место формула (1):

$$(1) \qquad d\vec{r} = \vec{r}_u \cdot \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}.$$

Определение $\lhd \lhd$ *4.5.* *Векторы* $\vec{r}_u \vec{r}_v$ *называются координатными векторами поверхности S.* *4.5.* $\rhd \rhd$

Свойства координатных векторов:

1) $\vec{r}_u \neq 0$;

2) $\vec{r}_v \neq 0$;

3) $\vec{r}_u \nparallel \vec{r}_v$.
из условия $(**) \Rightarrow 1., 2., 3.$

4) Координатные векторы являются касательными векторами к координат ным линиям нашей поверхности, проходящими через данную точку.

Доказательство $\square \triangleleft$. Рассмотрим кривую : $\Gamma_1 : \begin{cases} u = C \\ v = t. \end{cases}$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{1} = \text{(по формуле (1))} = \vec{r}_v \Rightarrow \vec{r}_v - \text{ касательная прямой } \Gamma_1;$$

$\vec{r}_u$- касательная кривой $\Gamma_2 : \begin{cases} u = t \\ v = C. \end{cases}$

Из свойств 1., 2., 3. $\Rightarrow$ $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ однозначно определяют некоторую плоскость. Она будет касательной плоскостью.
Рассмотрим множество всех прямых, касательных к кривым, принадлежащим S и прох одящих через данную точку. Очевидно, что все эти кривые в плоскости, определенной координатами векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Это следует из формулы (1), т.к. касательный вектор любой такой кривой представляет собой линейную комбинацию векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. *Ч.т.д.* $\triangleright \square$.

Определение $\triangleleft \triangleleft$ *4.6.* (Касательная плоскость)
Плоскость, содержащая все прямые, касательные к данной поверхности в данной точке, называется касательной плоскостью к S в данной точке.
Выведем уравнение касательной плоскости:
Пусть : $\vec{r}$-радиус-вектор; $\vec{\rho}$-радиус-вектор произвольной касательной плоскости; $\vec{\rho} - \vec{r}$-лежит в касательной плоскости.

Положим $\vec{n} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, $\vec{n} \perp \vec{\rho} - \vec{r}$.
Потребуем : $(\vec{n}, \vec{\rho} - \vec{r}) = 0$.

Получаем : $([\vec{r}_u, \vec{r}_v], \vec{\rho} - \vec{r}) = 0$.
Это и есть уравнение касательной плоскости. *4.6.* $\triangleright \triangleright$

Упражнение $\triangleleft \square$ *4.2.* оказать, что уравнение касательной плоскости явно заданной поверхности представляет собой частный случай только что выведенного уравнения. *4.2.* $\square \triangleright$

§4.в. Линейный элемент, длина дуги и первая квадратичная форма поверхности.

Пусть S задана уравнениями $(*)$, функции x, y, z имеют непрерывные частные производные и выполнено условие $(**)$.

Если $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad x, y, z \in C'_{[t_1,t_2]}$ пространственная параметрически заданная кривая, тогда ее длина s равна :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(y))^2 + (z'(t))^2} dt, \text{ при этом дифференциал s : } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

С одной стороны:
$d\vec{r} = (dx\ dy\ dz); \quad d(\vec{r})^2 = (d\vec{n}, d\vec{r}) = |d\vec{r}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2; \quad d(\vec{r})^2 = ds;$
С другой стороны :
$(1) \Rightarrow d\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv \Rightarrow d(\vec{r})^2 = (\vec{r}_u)^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + (\vec{r}_v)^2 dv^2;$
Получаем (2) :

$$(2) \quad ds^2 = (\vec{r}_u)^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + (\vec{r}_v)^2 dv^2;$$

$$\vec{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right); \quad \vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right);$$

Введем следующие обозначения :

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2; \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2; \quad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Определение ◁ ◁ 4.7. *Введенные величины E, G, F называются коэффицентами Гаусса поверхности S. С помощью таких коэффицентов формула (2) записывается таким образом :*

$$(2') \qquad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2;$$

4.7. ▷ ▷

Определение ◁ ◁ 4.8. *Выражение для ds^2 называется линейным коэффициентом поверхности S.*
4.8. ▷ ▷

Следствие: из формулы (2') получаем формулу для длины дуги :

$$(3) \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + G\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2} dt;$$

Определение ◁ ◁ 4.9. *Выражение, определенное формулой (2') представляет собой дифференциальную квадратичную форму. Эта форма называется первой квадратичной формой S.* *4.9. ▷ ▷*

Лемма: Первая квадритичная форма поверхности является положительно определенной квадратичной формой.

Доказательство □ ◁ . Рассмотрим $EG - F^2$; Нетрудно доказать, что: $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$, где A, B, C - миноры.
$EG - F^2 > 0$ (в силу условия $(**)$),$E > 0, G > 0; ((**))$
Рассмотрим матрицу квадратичной формы (2'):

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} D_1 = E > 0 \\ D_2 = EG - F^2 > 0 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \text{ кв.форма (2')} > 0 \text{ согласно критерию Сильвестра}$$

Ч.т.д. $\triangleright \square$.

Пример : Найдем коэффициенты Гаусса явно заданной поверхности. $z = z(x,y)$, где $z(x,y) \in C^{1,1}_{x,y}D$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} = 1 & \dfrac{\partial y}{\partial u} = 0 & \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = 0 & \dfrac{\partial y}{\partial v} = 1 & \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2; \quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2; \quad F = \frac{(\partial z)^2}{\partial x \partial y}.$$

§4.г. Площадь поверхности. Определения и основные формулы.

Определение $\triangleleft\triangleleft$ 4.10. *Пусть :*
S - задана своими параметрическими уравнениями $(*)$, где $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^{1,1}_{u,v}(D)$, где D квадрируемое множество : $D \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$, и выполнены условия $(**)(A,B,C$ - миноры матрицы Якоби отображения $(*))$;
Разделим D на элементарные прямоугольники du и dv прямыми, параллельными xOy, при этом S разобъется на элементарные площадки координатными линиями, соответствующими сетке на D. При этом "неправильными" элементами будем пренебрегать, поскольку они сводятся к бесконечно малым высшего порядка. Рассмотрим S_i, заменим на плщадь прямоугольника, построенного на векторах $\vec{r}_u \triangle u, \vec{r}_v \triangle v$.
Площадь прямоугольника :

$$!!_i = |[\vec{r}_u \triangle u, \vec{r}_v \triangle v]|_i = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_i \triangle u \triangle v;$$

Составим сумму :

$$!! = \sum_i !!!_i = \sum_i |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_i \triangle u \triangle v;$$

Примем за определение площади нашей поверхности : $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} !!$, где λ- параметр разбиения, к примеру $\lambda = \sqrt{\triangle u^2 + \triangle v^2}$;

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \triangle u \triangle v = \iint\limits_D |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv \qquad (4)$$

Преобразуем (4): ...

$$(5) \qquad S(s) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} du dv \quad \Rightarrow (6)$$

$$(6) \qquad S(s) = \iint\limits_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

, где A, B, C -миноры.
4.10. $\triangleright\triangleright$

**** **** *** *** * * * * * ** * * ** ** ** * * **** * * * ** * * * * **

Свойства поверхностного интеграла первого рода.

1) Если функция $f(M)$ интегрируема по поверхности S, то $f(M)$ ограничена на S. Обратное вообще говоря неверно.
2) Если функция $f(M) \in C(S)$, то $f(M)$ интегрируема по S.
3) Линейность.(самостоятельно)
4) Аддитивность.(самостоятельно)
5)

$$\iint\limits_S Cds = C \cdot S(s)(\text{s - поверхность}) \Rightarrow \iint\limits_S ds.$$

§4.д. Сведение повторного интеграла 1-го рода к двойному интегралу.

Теорема ◁ 4.1: (о сведении повторного интеграла первого рода к двойному интегралу.)
Пусть s задана своими параметрическими уравнениями $(*)$, где $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C'_{u,v}(D)$, где $D \in \mathbb{R}^2$- квад рируемое множество и $rank[\mathfrak{J}(x)] = 2$
Пусть: $f(M) \in C(s)$
Тогда: имеет место формула (1):

$$(1) \quad \iint\limits_s f(x,y,z)ds = \iint\limits_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{EG - F^2}dudv;$$

где, E, G, F - коэффициенты Гаусса. А также справедлива эквивалентная формула:

$$(1') \quad \iint\limits_s f(x,y,z)ds = \iint\limits_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot sqrtA^2 + B^2 + C^2dudv;$$

где A, B, C - коэффициенты Якоби поверхности s (т.е. миноры матрицы Якоби отображения $(*)$)
4.1. ▷

Пример $\iint\limits_s zds = (*)$

$$s : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v. \end{cases} \qquad \begin{Bmatrix} 0 \leqslant u \leqslant a \\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi. \end{Bmatrix}$$

Найдем коэффициенты Гаусса:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} u\sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 1;$$

$$E = 1, \quad G = u^2 + 1, \quad F = 0$$

$$(*) = \iint\limits_D v \cdot \sqrt{u^2+1}\, dudv = \int\limits_0^a du \int\limits_0^{2\pi} v \cdot \sqrt{u^2+1}\, dudv = 2\pi^2 \cdot \int\limits_0^a \sqrt{u^2+1}\, du =$$

$$= \pi^2 [u \cdot \sqrt{u^2+1} + \ln(u + \sqrt{u^2+1})] \Bigg|_0^a = \pi[a \cdot \sqrt{a+1} + \ln(a + \sqrt{a^2+1})].$$

§5. Поверхностный интеграл второго рода.

§5.a. Основные определения и свойства.

а)Предуведомление:

1) Если рассматривается замкнутая поверхность s, то через s_+ обозначается ее внешняя сторона, а через s_- - внутренняя.
2) Если рассматривается явно заданная поверхность $z = z(x, y)$, то через $\overline{s}$ обозначается ее верхняя сторона, а через $\underline{s}$ - нижняя.
3) Во всем дальнейшем разложении все рассматривыемые поверхности предполагаются кусочногладкими кривыми.

б) Основные определения :

Изложение будем вести для случая поверхности, заданной явно уравнением $z = z(x, y)$.
Пусть : поверхность задана явно уравнением $z = z(x, y),\ z(x, y) \in C(D)$,, где D - проекция s на плоскость xOy - есть квадрируемое множество.

Определение ◁ ◁ 5.1. *Пусть:*

1) $f(M) = f(x, y, z)$ определена на s

2) $\tau = \tau(D_1, D_2, \dots, D_n)$ - произвольное разбиение D на части кусочногладкими кривыми.

Тогда :

$$!! = \Im(M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) d_i,$$

где

$$d_i = \begin{cases} s(D_i), & \text{если рассматривается верхняя сторона } s \\ -s(D_i), & \text{если рассматривается нижняя сторона.} \end{cases},$$

$M_i \in s_i$, где s_i та часть поверхности s, которая проектируется в D_i. !! называется интегральной суммой $f(M)$ по s.

5.1. ▷ ▷

Замечание □ 5.1. Фактически в этом определении рассматриваются два выражения:

$$\overline{!!} = \overline{\Im}_\tau(M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) s(D_i)$$
$$\underline{!!} = \underline{\Im}_\tau(M_i) = -\sum_{i=1}^{n} f(M_i) s(D_i)$$

$$\underline{!!} = -\overline{!!}$$

5.1. □

Определение ◁ ◁ 5.2. *Если*

$$\exists \lim_{\lambda\ to0} !! = \lim_{\lambda\to 0} \Im_\tau(M_i) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)d_i = \Im,$$

не зависящий от λ, M_i, то функция $f(M)$ называется интегрируемой по s, а $\Im$ поверхностным интегралом второго рода функции $f(M)$ по s и обозначается:

$$\Im = \iint_s f(M)dxdy = \iint_s f(x,y,z)dxdy.$$

5.2. ▷ ▷

Замечание □ 5.2. Фактически здесь определены два числа, а именно:

$$\overline{\Im} = \lim_{\lambda\to 0} \overline{!!} = \iint_{\overline{s}} f(x,y,z)dxdy$$

и

$$\underline{\Im} = \lim_{\lambda\to 0} \underline{!!} = \iint_{\underline{s}} f(x,y,z)dxdy.$$

5.2. □

Замечание □ 5.3. Из определений 1 и 2 следует, что если существуют $\overline{\Im}$ и $\underline{\Im}$ то:

$$\underline{\Im} = -\overline{\Im}$$

5.3. □

Замечание □ 5.4. Аналогично определяются $\iint\limits_s f(x,y,z)dzdx$, $\iint\limits_s f(x,y,z)dydz$.
5.4. □

Замечание □ 5.5. Мы определили три вида поверхностных интегралов второго рода:

$$\iint_s f(x,y,z)\ dx\ dy, \quad \iint_s f(x,y,z)\ dx\ dz, \quad \iint_s f(x,y,z)\ dy\ dz.$$

На самом деле эти три интеграла фигурируют совместно. В результате чего появляется поверхностный интеграл второго рода общего вида :

$$\iint_s P(x,y,z)\ dy\ dz + Q(x,y,z)\ dz\ dx + R(x,y,z)\ dx\ dy,$$

где функции P, Q, R определены на поверхности s. *5.5. □*

Замечание □ 5.6. Мы определили поверхностный интеграл второго рода для поверхностей, которые однозначно проектируются на ту или иную плоскость. Это определение может быть распространено на случай кусочногладкой поверхности.

5.6. $\square$

в)Основные свойства :

Свойства излагаются для случая, когда $s : z = z(x, y)$

1) Если $f(x, y, z)$ интегрируема по s, то $f(x, y, z)$ ограничена на s. Обратное неверно.

2) Если $f(x, y, z) \in C(s)$, то $f(x, y, z)$ интегрируема по s.

3) Линейность.(самостоятельно)

4) Аддитивность.(самостоятельно)

5)

$$\iint\limits_{\overline{s}} C\,dx\,dy = C \cdot S(D), \quad \iint\limits_{\underline{s}} C\,dx\,dy = -C \cdot S(D),$$

где D - проекция s на xOy.

5$'$)

$$S(D) = \iint\limits_{\overline{s}}\ dx\,dy = -\iint\limits_{\underline{s}}\ dx\,dy$$

6) В случае, если s является цилиндрической с образующими параллельными оси Oz, то

$$\iint\limits_{s} f(x, y, z)\,dx\,dy = 0,$$

т.к. любая интегральная сумма равна 0, при $\forall\ f, \forall\ \tau, \forall M_i$.

§5.б. Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу.

Преамбула: Пусть :

1) s задана своим уравнением $z = z(x, y), \quad z(x, y) \in C^{1,1}_{x,y}(D)$, где D - проекция поверхности s на xOy - квадрируемое множество.

2) $f(x, y, z) \in C(s)$.

Рассмотрим: $\iint\limits_{s} f(x, y, z)\,dx\,dy$. Для определенности рассмотрим:

$$\iint\limits_{\underline{s}} f(x, y, z)\,dx\,dy = liml_{\lambda\to 0} suml^{n}_{i=1} f(x_i, y_i, z_i)s(D_i) = (*)$$

при этом $(x_i, y_i, z_i) \in s_i$, т.е. $z_i = z(x_i, y_i)$;

$$(*) = \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))s(D_i)} \quad (\maltese)$$

Это и есть одна из возможных интегральных сумм для двойного интеграла

$$\underbrace{\iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y))\,dx\,dy}_{\substack{\downarrow \\ \text{функция непрерывна}}}$$

$$(\maltese) \quad \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$$

, где

$$\begin{array}{c} \lambda(\tau) = \max\limits_i \; diam\; s_i \\ \updownarrow \\ \lambda^{'}(\tau) = \max\limits_i \; diam\; D_i \end{array} \qquad \lambda(\tau) \to 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^{'}(\tau) \to 0$$

Можем пользоваться любым из этих двух λ

Теорема $\lhd$ *5.1:*
(первая теорема о сведении поверхностного интеграла к двойному интегралу)*:*

Пусть выполнены условия 1 и 2.

Тогда: имеют место формулы:

$$(*) \quad \iint\limits_{\overline{s}} f(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\,dx\,dy;$$

$$(**) \quad \iint\limits_{\underline{s}} f(x,y,z)\,dx\,dy = -\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$$

5.1. $\rhd$
Пример:

$$\oiint\limits_{S_+} z\,dx\,dy \qquad S: x^2+y^2+z^2 = 1.$$

$$\oiint\limits_{S_+} z\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{s_1}} + \iint\limits_{\underline{s_2}} = (*)$$

$$z\Big|_{s_1} = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$z\Big|_{s_2} = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy - \iint\limits_D (-\sqrt{1-x^2-y^2})\,dx\,dy = 2\cdot\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= 2\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 r\sqrt{1-z^2}dr = 2\pi(-r^2)^{3/2}\Bigg|_0^1 2/3 = 4/3\pi.$$

Теорема $\lhd$ *5.2:* (Вторая теорема о сведении поверхностного интеграла второго рода к двойному)*:*

Пусть:

1) Поверхность s задана своими параметрическими уравнениями $(*)$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

где $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^{1,1}_{u,v}(D)$*, где* $D \subset \mathbb{R}^2$ *- квадрируемое множество,*

2) $rank[\mathfrak{J}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2,$

3) $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \in C(s)$ *— функции непрерывны на поверхности.*

Тогда: имеет место формула:

$$(***) \qquad \iint\limits_s P(x,y,z)\ dy\ dz + Q(x,y,z)\ dz\ dx + R(x,y,z)\ dx\ dy =$$

$$= \pm \iint\limits_D \left[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \cdot A + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \cdot B + R(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \cdot C\right]\ du\ dv,$$

где A, B, C - коэффициенты Якоби поверхности s (т.е. миноры матрицы Якоби, взятые в естественном порядке, при этом выбор знака + или - связан с выбором стороны поверхности s в интеграле, стоящем в левой части. В случае замкнутой поверхности выбор знака + будет иметь место, когда правой ориентации на плоскости uv соответствует выбор внешней нормали s.) 5.2. $\triangleright$

Пример:

$$(I) = \iint\limits_s \frac{dydz}{x^\alpha} = (*)$$

$$s: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos u \cos v \\ y = b \sin u \cos v \\ z = c \sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{r} x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \\ 0 \leqslant u \leqslant \pi/2, 0 \leqslant v \leqslant \pi/2 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\cos u \cos v & 0 \\ b \sin u \sin v & c\cos v \end{bmatrix} = bc\cos u \cos^2 v.$$

$$(*) = \iint\limits_D \frac{bc\cos u\cos^2 v}{a^\alpha \cos^\alpha u \cos^\alpha v}\ du\ dv = \frac{bc}{a^\alpha} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{1-\alpha} u\ du\ \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2-\alpha} v\ dv =$$

$$= \frac{bc}{4a^\alpha} \cdot \mathfrak{B}(1/2, 1-\alpha/2) \cdot \mathfrak{B}(1/2, 3/2-\alpha/2) = \left(\begin{cases} 1-\alpha/2 > 0 \\ 3/2-\alpha/2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha < 2 \right) =$$

$$= \frac{bc}{4a^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(1-1/2)}{\Gamma(3/2-\alpha/2)} \cdot \frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(3/2-\alpha/2)}{\Gamma(3/2-\alpha/2)} = \frac{\pi bc}{4a^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(1-1/2)}{(1-1/2)\cdot\Gamma(1-1/2)} = \frac{\pi bc}{4a^\alpha(1-1/2)},$$

где $\alpha < 2$.

Упражнение

$$\oiint\limits_S \frac{dzdx}{y} + \frac{dzdy}{y} + \frac{dxdy}{z}; \quad s : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

§5.в. Формула Гаусса.

Теорема $\lhd$ *5.3:* (Формула Гаусса)*:*
Пусть:

1) Цилиндрический брус V ограничен снизу поверхностью $s_1 : z = z_1(x,y)$, сверху $s_2 : z = z_2(x,y)$, где$z_1(x,y)$ и $z_2(x,y) \in C^{1,1}_{x,y}(D)$ такие, что $z_1(x,y) \leqslant z_2(x,y)\ \forall\ (x,y) \in D, D$ - прекция бруса на xOy, а с боков он ограничен цилиндрической поверхностью s_3, образующие которой параллельны Oz, а направляющей служит кусочногладкая замкнутая кривая, ограничивающая D,

2) функция $R(x,y,z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) \in C(\overline{V})$, где $\overline{V} : V \cup s, s : s_1 \cup s_2 \cup s_3$

Тогда: имеет место формула (1):

$$(1) \qquad \oiint\limits_{S_+} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

5.3. $\rhd$

Доказательство $\square \lhd$ *??.* Рассмотрим:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

Согласно первой теореме о замене тройного интеграла к повторному $\Rightarrow$:

$$\Rightarrow \iint\limits_D \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \right] dx\,dy = \iint\limits_D R(x,y,z) \Bigg|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dx\,dy =$$

$$\iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy - \iint\limits_D R((x,y,z_1(x,y)) = \text{ применим первую теорему о сведении поверхностного}$$

$$\text{интеграла второго рода к двойному } = \iint\limits_{\overline{s}_2} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint\limits_{\underline{s}_1} R(x,y,z)\,dx\,dy +$$

$$+\underbrace{\iint\limits_{s_3} R(x,y,z)\,dx\,dy}_{\substack{\| \\ 0 \quad \text{(согл. свойству 6).}}} = \oiint\limits_{S} R(x,y,z)\,dx\,dy;$$

Ч.т.д. **??** ▷ □.

Замечание □ *5.7.* Аналогично выводятся формулы (2) и (3):

$$(2) \qquad \oiint\limits_{S_+} Q(x,y,z)\,dz\,dx = \iiint\limits_{V} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$(3) \qquad \oiint\limits_{S_+} P(x,y,z)\,dy\,dz = \iiint\limits_{V} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

5.7. □

Замечание □ *5.8.* В случае если область V удовлетворяет условию, при котором справедливы формулы (1), (2), (3), то можно записать обобщенную формулу:

$$(4) \qquad \oiint\limits_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\,dx\,dy\,dz$$

5.8. □

Замечание □ *5.9.* Мы доказали формулу Гаусса для областей специального вида, однако можно доказать, что эта формула справедлива для произвольной области V, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой поверхностью s. *5.9.* □

Следствие 1 из **VI**.5.3. *(Выражение для объема тела через поверхностный интеграл)* :

Пусть: кубируемое тело V ограничено замкнутой кусочногладкой поверхностью s.

Тогда: объем этого тела

$$V(V) = \iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz$$

бесконечным множеством способов может быть записан при помощи поверхностного интеграла по поверхности s. 1 из **VI**.5.3.

Например:

$$V = \oiint\limits_{S_+} x\,dy\,dz = \oiint\limits_{S_+} y\,dx\,dz = \oiint\limits_{S_+} z\,dx\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5) \quad V = 1/3 \oiint\limits_{S} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy.$$

§5.г. Связь между поверхностными интегралами первого и второго родов.

Пусть:

1) поверхность $s : z = z(x, y)$, где $z(x, y) \in C(D)$,где D проекция поверхности s на плоскость xOy есть квадрируемое множество,

2) $f(M) = f(x, y, z)$.

   Напомним, что ранее было доказано, что площадь $S(s)$ поверхности s вычисляется по формуле

$$S(s) = \iint\limits_D \frac{dx\, dy}{\cos\gamma}$$

   где γ — угол, образованный нормалью $\overrightarrow{n}$ с осью Oz.

3) $\tau = \tau(s_1, s_2, \dots, s_n)$ - произвольное разбиение s, D_i - проекция s_i на плоскость xOy.

Рассмотрим поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint\limits_{\underline{s}} f(M)\, dx\, dy\ .$$

Заметим, что он существует т.к. поверхность обладает нужной степенью гладкости $\Rightarrow$ он может быть вычислен с соответствующим выбором промежуточных точек.

$$S(s_i) = \iint\limits_{D_i} \frac{dx\, dy}{|\cos\gamma|} = \clubsuit$$

$$|\cos\gamma| = \begin{cases} \cos\gamma \text{ если } M \in s_+ \\ \cos\gamma \text{ если } M \in s_- \end{cases}$$

$$\clubsuit = \iint\limits_{D_i} \frac{dx\, dy}{\cos\gamma} = \text{ теорема о среднем } = \frac{1}{\cos\gamma_i} \cdot s(D_i)$$

где $\overline{\gamma}$ - угол образуемый нормалью в некоторой промежуточной точке $\overline{M}_i \in s_i \Rightarrow s(D_i) = \cos\overline{\gamma}_i$ мы можем:

$$S(s_i) = \iint\limits_{\underline{s}} f(M)\, dx\, dy = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \mathfrak{I}_\tau(M_i) = \text{ спец. выбор } = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \mathfrak{I}_\tau(\overline{M}_i) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{M}_i) \cdot s(D_i) =$$

$$= \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{M}_i) \cdot \cos\gamma = \iint\limits_{s} f(M) \cdot \cos\gamma ds = \iint\limits_{s} f(x, y, z) \cdot \cos\gamma ds \Rightarrow \text{выведена формула (1)}$$

$$(1) \qquad \iint\limits_{\overline{s}} f(x, y, z) dx\, dy = \iint\limits_{s} f(x, y, z) \cdot \cos\gamma ds$$

Аналогично устанавливаем формулу (2):

$$(2) \qquad \iint\limits_{\underline{s}} f(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{s} f(x,y,z)\cdot\cos\gamma ds$$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$ теорема:

Теорема $\lhd$ *5.4:* (о связи поверхностных интегралов первого и второго родов.)

Пусть: 1)повехность s задана своим уравнением $s: z = z(x,y)$, *где* $z(x,y) \in C^{1,1}_{x,y}(D)$, *где D - проекция s на xOy - квадрируемое множество*

2)$f(M) \in C(s)$.

Тогда : справедлива формула (3):

$$(3) \qquad \iint\limits_{s} f(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{s} f(x,y,z)\cdot\cos\gamma ds,$$

где γ *- угол, образуемый нормалью поверхности s с осью Oz, а поверхность s в левой части формулы (3) берется по любой стороне поверхности s.* *5.4.* $\rhd$

Замечание $\square$ *5.10.* Аналогично доказывается при соответствующих предположениях формула (4):

$$(4) \qquad \iint\limits_{s} f(x,y,z)\,dz\,dy = \iint\limits_{s} f(x,y,z)\cdot\cos\beta ds$$

а также формула (5):

$$(5) \qquad \iint\limits_{s} f(x,y,z)\,dy\,dz = \iint\limits_{s} f(x,y,z)\cdot\cos\alpha ds$$

где α, β, γ углы, образованные нормалью поверхности с осями Oz, Oy, Ox. *5.10.* $\square$

Замечание $\square$ *5.11.*

$$(6) \qquad \iint\limits_{s} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{s} (P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma) ds$$

Причем формула (6) справедлива для любой кусочногладкой двухсторонней поверхности s при условиях, что $P, Q, R \in C(s)$,причем α, β, γ углы, образованные нормалью к s с осями координат, а поверхности s в левой части формулы (6) берется по любой стороне поверхности s. *5.11.* $\square$

Замечание $\square$ *5.12.* Другая запись формулы Гаусса

Рассмотрим:

$$\oiint\limits_{S} P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma = (\text{ из } (6)) = \oiint\limits_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \text{ (из формулы Гаусса)} =$$

$$= \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\,dx\,dy\,dz. \text{ Получим:}$$

$$(7) \qquad \oiint\limits_{S} (P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma)\,ds = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) ds$$

в предположение существует область V, ограниченная кусочногладкой замкнутой поверхностью s.Функции $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \in C(\overline{V})$ где $\overline{V} = V \cup s$ *5.12.* $\square$

§5.д. Векторная запись формулы Гаусса.

Пусть:

1) имеется $V \in \mathbb{R}^3$ - область, ограниченная кусочногладкой поверхностью s;
2) в V задано векторное поле $\vec{A}(\tau) = \vec{A}(x, y, z) = (Ax\ \ Ay\ \ Az)$ где скалярные функции Ax Ay Az непрерывны со своими частными производными.

Определение ◁ ◁ 5.3. *Выражение*

$$\oiint\limits_S (\vec{A}, \vec{n}) ds = \oiint\limits_S \vec{A}_n ds$$

(где $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - единичный вектор нормали к поверхности) - поток векторного поля A через поверхность s. *5.3. ▷ ▷*

Определение ◁ ◁ 5.4.

$$\frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z} = div\vec{A} - \text{ дивергенция векторного поля } A, \text{ скалярная функция.}$$

5.4. ▷ ▷

Из определений 1, 2 и формулы (7) $\Rightarrow$

$$\oiint\limits_S (\vec{A}, \vec{n}) ds = \iiint\limits_V \mathbf{div}\vec{A} dV - \text{векторная запись формулы Гаусса.}$$

Пример: Найти поток вектора $\vec{A} = (x^3 y^3 z^3)$ через поверхность $s : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ из формулы Гаусса.

$$\oiint\limits_S (\vec{A}, \vec{n}) ds = 3 \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz =$$

В сферических координатах:

$$= 3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} dQ \int\limits_0^{\sin Q} \tau^2 r^2 \cos Q dr = 6\pi/5 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 Q \cos Q dQ = \pi/6 \sin^6 Q \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{5}$$

§5.е. Критерий равенства нулю интеграла по замкнутой поверхности второго рода.

Определение ◁ ◁ 5.5. *Область $V \subset \mathbb{R}^3$ называется пространственно односвязной если этой области вместе с любой замкнутой поверхностью существущей в этой области существует также внутренность этой поверхности.(область без дыр)* *5.5. ▷ ▷*

Теорема ◁ 5.5: *Пусть:*

1) V — пространственно-односвязная область;

2) $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \in C(V)$.

Тогда: чтобы интеграл от вектор-функции $\overrightarrow{\{P,Q,R\}}$ по любой замкнутой кусочногладкой поверхности s принадлежащей нашей области V равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы сумма частных производных функций P, Q и R равнялась нулю, т.е.:

$$\oiint\limits_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad (\forall s, V,\ \forall (x,y,z) \in V)$$

5.5. $\triangleright$

Доказательство $\square \triangleleft$ ***VI**.5.5.*
Доказательство необходимости опускаем.
Достаточность.Дано:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

$$\forall (x,y,z) \in V \Rightarrow \oiint\limits_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$\iiint\limits_D \Bigg(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}_{\substack{\| \\ 0}}\Bigg)\,dx\,dy\,dz \quad .$$

где D - внутренность поверхности s $\Rightarrow$(согласно условию односвязности) $\Rightarrow D \subset V \Rightarrow = 0$ *Ч.т.д.* **VI**.5.5 $\triangleright \square$.

Пример, показывающий, что условие односвязности области существенно:

$$s: x^2+y^2+z^2=1 \qquad \iint\limits_{s_+} \frac{x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad V: 1/4 < x^2+y^2+z^2 < 4$$

Все условия кроме односвязности выполнены.

$$P = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} + x \cdot 3/2(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2+x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2+x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

С одной стороны $\operatorname{div} = 0$.

$$\oiint\limits_{S_+} \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad s : x^2+y^2+z^2 = 1 \qquad \begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \sin u \cos v \\ z = \sin v. \end{cases}$$

$$\mathfrak{I} = \begin{vmatrix} -\sin u \cos v & \cos u \cos v & 0 \\ -\cos u \sin v & -\sin u \sin v & \cos v \end{vmatrix}$$

$$A = \cos u \cos^2 v, \quad B = \sin u \cos^2 v, \quad C = \sin^2 u \sin v \cos v + \cos^2 u \sin v \cos v = \sin v \cos v$$

$$\iint\limits_S \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iint\limits_D (\cos^2 u \cos^3 v + \sin^2 u \cos^3 v + \dots) =$$

$$= \iint\limits_D \cos v\,du\,dv = \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v\,dv = 4\pi \neq 0.$$

<u>*Упражнение* ◁ □ *5.1.*</u> оказать, что условие пространственной односвязности в области V не является необходимым. <u>*5.1.* □ ▷</u>

$$s : x^2+y^2+z^2 = 1 \quad V = 1/4 < x^2+y^2+z^2 < 4$$

$$\iint\limits_{S_+} \frac{y-z}{x^2+y^2+z^2}\,dy\,dz + \frac{z-x}{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx + \frac{x-y}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy.$$

Любой из этих вопросов заменяется формулой Гаусса. (4 и 5 пункт §6.)

ГЛАВА **VII**

Приложение 1. Вопросы и задачи к коллоквиуму.

Вопросы к коллоквиуму состоят из трёх частей.

Первые две части действительно образуют вопросы к коллоквиуму.

Третья часть — это вопросы к зачёту.

Все три части, взятые вместе — это вопросы к экзамену.

§1. Вопросы к коллоквиуму. Часть 1.

1) Доказать критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Вывести из него критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Доказать, что если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве E, и если функция $\varphi(x)$ — ограничена на множестве E, т.е. $|\varphi(x)| \leqslant M \quad \forall x \in E$, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(x) u_n(x)$ сходится равномерно на E.
2) Вывести необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.
   На примере $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n}, \quad x \in \mathbb{R}$ показать, что это условие является не достаточным.
3) Вывести признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
   Примени́м ли этот признак к ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$, $x \in \mathbb{R}$?
   Покажите, что этот ряд сходится равномерно на множестве $E = \mathbb{R}$.
4) Сформулируйте признак Диришле равномерной сходимости функциональных рядов.
   Докажите, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ сходится равномерно на множестве $E = \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.
   Примени́м ли к этому ряду признак Вейерштрасса на множестве E?
5) Докажите теорему о непрерывности предельной функции функциональной последовательности.
   Покажите, что условие равномерной сходимости в этой теореме существенно.
   Сформулируйте аналогичную теорему для суммы функционального ряда.
6) Является ли условие равномерной сходимости на множестве E необходимым для непрерывности суммы функционального ряда? Рассмотрите пример
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}\right]$, $E = [0, 1]$.

7) Докажите теорему о почленном интегрировани функционального ряда.
   На примере ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[nxe^{-nx^2}-(n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right]$, $x\in[0,1]$ покажите, что условие равномерной сходимости в этой теореме является существенным.

8) Докажите теорему о почленном интегрировани функционального ряда.
   На примере функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}\right]$, $x\in[0,1]$ покажите, что условие равномерной сходимости в этой теореме не является необходимым.

9) Докажите теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.
   Сформулируйте аналогичную теорему для последовательностей.

10) Докажите первую теорему Абеля о степенных рядах.
    Дайте определение радиуса сходимости степенного ряда.

11) Дайте определение радиуса сходимости степенного ряда.
    Докажите теорему о радиусе сходимости.
    Приведите пример степенного ряда, у которого:
    а) $R=0$, **б)** $R=\infty$, **в)** $R=3$.

12) Выведите формулы для радиуса сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$.

    а) сходящегося при $x=\pm R$;
    б) расходящегося при $x=\pm R$;
    в) сходящегося при $x=R$ и расходящегося при $x=-R$;
    г) расходящегося при $x=R$ и сходящегося при $x =_{R}$.

13) Дайте определение верхнего предела последовательности.
    Сформулируйте теорему Коши-Адамара.
    Рассмотрите пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n]^n\cdot x^n$.

14) Докажите теоремы о равномерной сходимости степенного ряда и о непрерывности суммы степенного ряда.
    Приведите пример степенного ряда:

    а) равномерно сходящегося в $(-R,R)$;
    б) неравномерно сходящегося в $(-R,R)$.

15) Докажите теорему о почленном интегрировании степенного ряда.
    Примените её к разложению: **а)** $\ln(1+x)$, **б)** $\operatorname{arctg} x$.

16) Сформулируйте вторую теорему Абеля о степенных рядах. Используя эту теорему, установите справедливость разложения:
    а) $\ln(1+x)$ при $x\in(-1;1]$;
    б) $\operatorname{arctg} x$ при $x\in[-1;1]$.

17) Докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.

18) Дайте определение ряда Тейлора и аналитической функции. Докажите теорему о ряде Тейлора.

19) Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической.

20) Докажите теорему о достаточном условии разложения бесконечно дифференцируемой функции в ряд Тейлора.

21) Разложите в ряд Тейлора e^x, $\sin x$, $\cos x$.

22) Разложите в ряд Тейлора $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

23) Разложите в ряд Тейлора $(1+x)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq n \in \mathbb{N}$.

24) Исследуйте поведение биномиального ряда на концах интервала сходимости.

25) Разложите в ряд Тейлора $\arcsin x$, $\operatorname{arcsh} x$.
Исследовать поведение этих степенных рядов на концах интервала сходимости.

26) Разложите в ряд Тейлора полный эллиптический интеграл 1-го рода

$$\mathbf{K}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\ , \quad 0<k<1.$$

27) Разложите в ряд Тейлора полный эллиптический интеграл 2-го рода

$$\mathbf{E}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\, dt\ , \quad 0<k<1.$$

28) Дайте определение ортогональной системы функций. Докажите ортогональность тригонометрической системы функций на $[-\pi;\pi]$. Является ли эта система ортогональной на $[0;\pi]$?

29) Дайте определение тригонометрического полинома и тригонометрического ряда. Покажите, что не всякая непрерывная 2π-периодическая функция может быть представлена в виде тригонометрического полинома.

30) Дайте определение ряда Фурье функции, интегрируемой на $[-\pi;\pi]$. Докажите теорему: если тригонометрический ряд сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$, то он является рядом Фурье своей суммы.

31) Выведите формулы для коэффициентов Фурье чётной и нечётной функций.
Разложите $f(x)=x$ на $[0;\pi]$ в ряд по косинусам.

32) Выведите комплексную форму записи ряда Фурье.

33) Выведите формулу ряда Фурье на отрезке $[-l,l]$ и соответствующую ей комплексную форму записи.

34) Выведите подготовительное тождество Бесселя для $\Delta_n = \Delta(f;T_n)$, где $f(x)$ — интегрируема на $[-\pi;\pi]$, а $T_n(x)$ — тригонометрический полином.

35) Докажите теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье и установите тождество Бесселя.

36) Выведите неравенство Бесселя. Докажите что ряд, составленный из квадратов коэффициентов Фурье, сходится.

37) Докажите лемму Римана. Приведите пример всюду сходящегося тригонометрического ряда, не являющегося рядом Фурье никакой интегрируемой функции.

38) Дайте определения кусочно-непрерывной и кусочно непрерывно-дифференцируемой функции. Докажите теорему о почленном дифференцировании ряда Фурье.

39) Выведите оценку коэффициентов Фурье.

40) Докажите, что если $f(x) \in C_{[-\pi;\pi]}$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f(x)$ — кусочно непрерывно-дифференцируема на $[-\pi;\pi]$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ сходятся. (Здесь a_n и b_n — коэффициенты Фурье.)
Выведите признак равномерной сходимости ряда Фурье.

41) Сформулируйте свойство полноты тригонометрической системы функций. Выведите следствие о совпадении двух непрерывных функций, имеющих одни и те же коэффициенты Фурье.

42) Докажите теорему о равномерной сходимости ряда Фурье.
Докажите для функции $f(x) = |x|$, что ряд Фурье этой функции сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$ к этой функции.
Докажите аналогичное утверждение для функции $f(x) = x^2$.
Для этих двух рядов Фурье нарисуйте графики их сумм на всей оси.

43) Докажите теорему о почленном интегрировании ряда Фурье.

44) Сформулируйте теорему о почленном интегрировании ряда Фурье. Выведите из этой теоремы свойство полноты тригонометрической системы.

45) Сформулируйте неравенство Бесселя.
Выведите равенство Парсеваля.

46) Сформулируйте равенство Парсеваля.
Примените его к $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi;\pi]$.
Выведите формулы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

47) Сформулируйте теорему Дирихле о локальной сходимости ряда Фурье.
докажите теорему о равномерной сходимости ряда Фурье.

48) Дайте определения односторонних предельных производных.
Сформулируйте теорему Дирихле о локальной сходимости ряда Фурье.
Приведите пример неравномерно сходящегося ряда Фурье.

ГЛАВА **VIII**

Приложение 2. Методичка для преподавателей, ведущих семинары.

§1. Предуведомление.

§2. Варианты контрольных работ.

ГЛАВА **IX**

Предметный указатель, список примеров, выходные данные.

Предметный указатель.

Выходные данные.

А это, батенька, разбойники:

Компьютерный набор в пакете LaTeX2e :

Бим К.Г. (KGBim ©)

Киржнеренко М.А. (MasterM.A. ©)

Стручков М.А. (st.Michael ©)

Просто редактор и TeX-нический редактор: Арсентьев Д.М. (DMArsentev ©)

Мы благодарны Игорю Витальевичу Каменеву, прочитавшему эти стильные лекции.
А если кто-то чего-то не понял, то его надо посадить в машину времени и отправить в 1-ый семестр.
Вот так вот. Вот таким вот образом.

Мы благодарны Ольге Головчанской, Александру Кравченко, Георгию Герману и Дмитрию Голубину, чьи конспекты были использованы в процессе подготовки этих лекций.

Мы благодарны заведующему кафедрой математического анализа МГИЭМ
Борису Авенировичу Амосову.
Борис Авенирович сделал три добрых дела

1) предоставил макропакет MikTeX
2) предоставил набор русских pfb-шрифтов;
3) указал на dvi→pdf-конвертер **dvipdfm** и научил пользоваться им.

Без него PDF-варианта этих лекций не существовало бы.